МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

М. В. Федоров, О. М. Хренов

Конспект лекцій

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

(для студентів 2 курсу денної форми навчання за напрямом підготовки 6.060101 ”Будівництво”, спеціальностей “Промислове та цивільне будівництво”, “Міське будівництво та господарство”)

Харків ХНАМГ 2011

Федоров М. В. Теорія ймовірностей і математична статистика: Конспект лекцій (для студентів 2 курсу денної форми навчання за напрямом підготовки 6.060101 – ”Будівництво”, спеціальностей “Промислове та цивільне будівництво”, “Міське будівництво та господарство”) / М. В. Федоров, О. М. Хренов; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2011. – 68 с.

Автори: к.т.н., доц. М. В. Федоров,

к.т.н., доц. О. М. Хренов.

Конспект лекцій побудований за вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу та узгоджений з орієнтовною структурою змісту навчальної дисципліни, рекомендованою Європейською Кредитно-Трансферною Системою (ECTS).

Рекомендовано для студентів будівельних спеціальностей.

Рецензент: професор кафедри програмного забезпечення ЕОМ Харківського національного університету радіоелектроніки, доктор технічних наук Г. Г. Четвериков

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики та інформаційних технологій, протокол № 5 від 5 січня 2010р.

Лекція № 1

Основні поняття теорії ймовірностей. Класичне визначення ймовірності. Елементи комбінаторики

Випадкові й невипадкові події. Предмет теорії ймовірностей

Явища (події) , що спостерігаються нами, можна розділити на три види: достовірні, неможливі, випадкові.

Достовірною називають подію, що обов'язково відбудеться, якщо буде здійснена визначена сукупність умов.

Неможливою називають подію, що свідомо не відбудеться, якщо буде здійснена визначена сукупність умов.

Випадковою називають подію, що при здійсненні визначеної сукупності умов може або відбутися, або не відбутися.

Надалі, замість того щоб говорити «сукупність умов здійснена», будемо говорити коротко «проведено іспит». Таким чином, подія буде розглядатися як результат іспиту.

Приклади:

Іспит – підкидання монети. Подія – поява герба при падінні монети.

Іспит – постріл. Подія – улучення в мішень.

Іспит – проведення лекції. Подія – поява студента (той або інший студент частіше або рідше з'являється на лекції).

У теорії ймовірностей випадкові події прийнято позначати великими буквами латинського алфавіту.

Кожна випадкова подія є наслідком дії багатьох випадкових причин. Неможливо врахувати вплив на результат усіх цих причин, оскільки їх кількість дуже велика і закони їх дії невідомі. Тому теорія ймовірностей не ставить перед собою задачу передбачити, відбудеться одинична подія чи ні, – вона просто не в силах цього зробити. По іншому обстоїть справа, якщо розглядаються випадкові події, що можуть багаторазово спостерігатися при здійсненні тих самих умов, тобто якщо мова йде про масові однорідні випадкові події. Виявляється, що досить велике число однорідних випадкових подій незалежно від їхньої конкретної природи підкоряється визначеним закономірностям. Виявленням цих закономірностей і займається теорія ймовірностей.

Предметом теорії ймовірностей є ймовірності закономірності, які властиві масовим однорідним випадковим подіям.

Знання закономірностей, яким підкоряються масові випадкові події, дозволяє передбачати, як ці події будуть протікати.

Методи теорії ймовірностей широко застосовуються в різних галузях природознавства й техніки: у теорії надійності, теорії масового обслуговування, теоретичної фізики, геодезії, астрономії, теорії стрілянини, теорії помилок спостережень, теорії автоматичного керування, загальної теорії зв'язку, і в багатьох інших теоретичних і прикладних науках. Теорія ймовірностей служить також для обґрунтування математичної й прикладної статистики, що у свою чергу використовується при плануванні й організації виробництва, при аналізі технологічних процесів, попереджувальному й приймальному контролі якості продукції і для багатьох інших цілей.

Види випадкових подій.

Події називають *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає появу інших у тому самому випробуванні.

Приклади. Поява герба й поява цифри при підкиданні однієї монети.

Поява 2-х гербів і 2-х цифр при киданні двох монет.

Кілька подій утворять *повну групу*, якщо в результаті випробування обов'язково з'явиться хоча б одна з них.

Іншими словами, поява хоча б одної з подій повної групи є достовірна подія.

Приклади. Поява герба й поява цифри при підкиданні однієї монети.

Поява чорної й червоної масті при витягуванні карти з колоди.

Якщо події, що утворять повну групу, попарно неспільні, то в результаті іспиту з'явиться одна і тільки одна з цих подій.

Події називають *рівноможливими*, якщо є підстави вважати, що жодна з них не є більш можливою, чим інші.

Приклад. Іспит: підкидання монети. Події: поява герба й поява цифри.

Елементарними подіями називають такі події, що утворюють повну групу, є попарно несумісними і рівноможливими.

Ті елементарні події, в яких цікавляче нас подія настає, назвемо *сприятливими* цій події.

Класичне визначення ймовірності

Імовірність є число, що характеризує ступінь можливості появи події.

Імовірністю події А називають відношення числа сприятливих цій події елементарних подій до загального числа елементарних подій випробування.

Імовірність події А позначають Р(А).

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

m – число сприятливих події А елементарних подій;

n – загальне число можливих елементарних подій іспиту.

Імовірність набуває значення від 0 до 1.

Імовірність неможливої події дорівнює 0. Імовірність достовірної події дорівнює 1.

Задача 1. Визначити імовірність появи герба при одному киданні монети.

Подія А – поява герба при одному киданні.

Р(А) – імовірність події А

Можливі елементарні події іспиту: герб, цифра. Вони – несумісні, рівноможливі й утворюють повну групу: n=2

Число сприятливих елементарних подій дорівнює 1 (герб). m=1.

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

Задача 2. Визначити імовірність того, що при киданні грального кубика випаде не менше 5 очків.

А – поява очків $\geq$ 5. Р(А) – ?

Елементарні події: 1, 2, 3, 4, 5, 6 – несумісні, рівноможливі, утворюють повну групу.

Сприятливі елементарні події: 5,6.

n=6   m=2.

$$P(A)=\frac{2}{6}$$

Задача 3. В урні є a білих і b чорних куль. З урни випадково витягли кулю. Знайти імовірність витягу білої (подія А) і чорної (подія В) куль.

Число елементарних подій випробування дорівнює (a + b):

$$P(A)=\frac{a}{a+b},$$

$$P(B)=\frac{b}{a+b}.$$

Задача 4. З урни, що містить 3 білих і 3 чорних кулі, витягають 2 кулі. Знайти імовірність того, що вони обоє виявляться білими:

1 2 3 4 5 6

Сприятливі елементарні події:

$$\left.\begin{array}{l} 1-2 \\ 1-3 \\ 2-3 \end{array}\right\} 3$$

Несприятливі елементарні події:

$$\left.\begin{array}{lllll} 1-4 & 2-4 & 3-5 & 4-5 & 5-6 \\ 1-5 & 2-5 & 3-5 & 4-6 & \\ 1-6 & 2-6 & 3-6 & & \end{array}\right\} 12$$

Число елементарних подій n = 15 (несумісні, рівноможливі й утворюють повну групу).

Число сприятливих елементарних подій m = 3.

$$P(A) = m/n = 3/15 = 1/5$$

Елементи комбінаторики

Комбінаторика – це розділ математики, в якому вивчають кількісні характеристики різних видів з'єднань елементів, незалежно від природи самих елементів.

Перестановками з m елементів називаються такі їхні з'єднання, що відрізняються порядком елементів, які входять у з'єднання .

Приклад. Скласти всі можливі перестановки з трьох елементів (a, b, c).

abc   bac   cab   acb   bca   cba

Формула визначення числа перестановок із: m елементів

$$\boxed{P_m = m!} \qquad P_3 = 3! = 6$$

Розміщеннями з n елементів по m називаються такі з'єднання m елементів, обираних із заданих n елементів , що відрізняються друг від друга або самими елементами, що входять у групу, або їхнім порядком.

Приклад. Скласти всі можливі розміщення з трьох елементів (a, b, c) по 2 елементи.

ab ba

ac ca

bc cb

Формула визначення числа розміщень: із n- елементів по m

$$\boxed{A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}} \qquad A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

Сполученнями з n- елементів по m називаються такі з'єднання m елементів, обираних із заданих n елементів , що відрізняються один від одного тільки самими елементами, які входять у групу.

Приклад. Скласти всі можливі сполучення з трьох елементів (a, b, c) по 2 елементи:.

ab ba ac

Формула визначення числа сполучень: із n- елементів по m:

$$\boxed{C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}} \qquad C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3$$

Лекція № 2

Аксіоматика теорії ймовірностей. Правила додавання й множення ймовірностей і їхні наслідки. Моделі надійності технічних систем

Сума й добуток подій

Нехай здійснюється деяке випробування (експеримент) із випадковим результатом.

Розглянемо множину Ω усіх можливих результатів іспиту; кожний її елемент $\omega \in \Omega$ будемо називати *елементарною* подією, а всю множину Ω – *простором елементарних подій.* Будь-яка подія А в теоретико-множинному трактуванні є деяка підмножина Ω: $A \subseteq \Omega$.

Серед подій, що є підмножинами множини Ω, можна розглянути і саму Ω (адже кожна множина є своя власна підмножина); вона називається *достовірною* подією. До всього простору Ω елементарних подій додається ще й пуста множина $\varnothing$; ця множина теж розглядається як подія і називається *неможливою* подією.

Зазначимо, що елементарні події ω у тому самому ж досвіді можна задавати по-різному; наприклад, при випадковому киданні крапки на площину положення точки можна задавати як парою декартових координат (x,y), так і парою полярних (ρ,φ).

Сумою двох подій А и В називається подія С, що полягає у виконанні події А або події В, або обох подій разом.

Приклад.

Випробування: вибір карти з колоди.

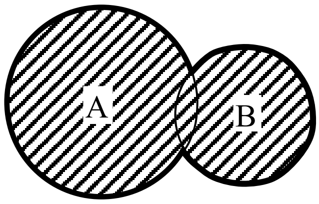
Події: А – поява трефової масті, В – поява туза, С – появу трефової масті (А) або туза (В)

$$C=A+B$$

Геометрична інтерпретація.

Нехай безліч усіх точок площини являє собою простір елементарних подій Ω.

Випробування – вибір довільної точки.



Подія A – поява крапки в області A

Подія B – появу крапки в області B

Подія C – поява крапки в заштрихованій області

$C = A + B$ ($C = A \cup B$)

Сумою декількох подій називається подія, яка відбувається, якщо відбувається хоча б одна з означених подій.

Добутком двох подій A і B називається подія D, що має місто, якщо спільно відбуваються події A та B.

Приклад.

Досвід: вибір карти з колоди.

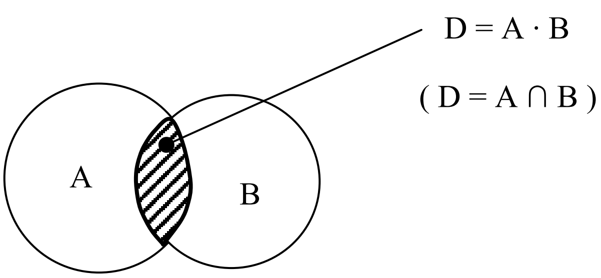
Події: A – поява трефової масті, B – поява туза, D – поява трефового туза.

$$D = A \cdot B \quad (D = A \cap B)$$

Геометрична інтерпретація.

Нехай множина усіх точок площини являє собою простір елементарних подій Ω.

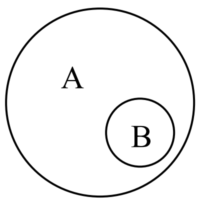
Іспит – вибір довільної точки.



Подія A – поява крапки в області A

Подія B – поява крапки в області B

Подія D – поява крапки й в області A і в області B.



$A + B = A$

$A \cdot B = B$

Добутком декількох подій називається подія, що відбувається, якщо відбуваються всі з означених подій.

Дамо теоретико-множинне тлумачення тим властивостям подій, які ми розглядали в першій лекції.

Кілька подій $A_1, A_2, ..., A_n$ утворюють *повну групу*, якщо $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, тобто їхня сума (об'єднання) є достовірною подією.

Дві події A, B називають *несумісними*, якщо відповідні множини не перетинаються, тобто $AB = \varnothing$.

Кілька подій $A_1, A_2, ..., A_n$ називаються *попарно несумісними* (або просто *несумісними*), якщо поява кожної з них виключає появу кожної з інших: $A_iA_j = \varnothing$ (при $i \neq j$).

Визначення ймовірності. Правило суми

На основі вищевикладеного трактування подій як множин сформулюємо аксіоми теорії ймовірностей. Нехай кожній події A ставиться у відповідність деяке число, яке будимо називати *ймовірністю події*. Імовірність події A будемо позначати P(A). Тому що будь-яка подія є множина, то ймовірність події є *функцією множини*.

Приймемо, що імовірності подій задовольняли наступним аксіомам:

1. *Ймовірність будь-якої події міститься між нулем і одиницею:*

$$0 \le P(A) \le 1$$

2. *Якщо A и B несумісні події* ($AB=\varnothing$), *то*

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Ця аксіома легко узагальнюється (за допомогою сполучної властивості додавання) на будь-яке число подій: якщо $A_iA_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i),$$

тобто імовірність суми несумісних подій дорівнює сумі їхніх ймовірностей.

Аксіому додавання ймовірностей іноді називають «теоремою додавання» (для іспитів, що зводяться до схеми випадків, вона може бути доведена), а також *правилом додавання ймовірностей.*

3. *Якщо є рахункова множина несумісних подій* $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ ($A_iA_j = \varnothing$ при $i \neq j$), *то*

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Третю аксіому приходиться вводити окремо, тому що вона не виводиться з другої.

Правило додавання ймовірностей має ряд важливих наслідків. У якості одного з них доведемо, що сума ймовірностей повної групи несумісних подій дорівнює одиниці, тобто якщо

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega; \quad A_iA_j = \varnothing \text{ при } i \neq j,$$

$$\text{то} \quad \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Дійсно, оскільки події $A_1, A_2, ..., A_n$ несумісні, то до них може бути застосовано правило додавання:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(\Omega) = 1.$$

Протилежним стосовно події A називається подія $\bar{A}$, що складається в не появі A и, виходить, що доповнює її до Ω.

Приклади:

1. Випробування – постріл по мішені:

   A – улучення в мішень

   $\bar{A}$ – невлучення в мішень

2. Випробування – підкидання грального кубика:

   A – поява парної цифри

   $\bar{A}$ – поява непарної цифри

3. Випробування – підкидання монети:

   A – герб

   $\bar{A}$ – цифра.

Зокрема, якщо дві події А и $\bar{A}$ протилежні, то вони утворять повну групу несумісних подій і

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1,$$

тобто *сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці*.

Ця властивість протилежних подій дуже широко застосовується в теорії ймовірностей. Часто буває простіше обчислити ймовірність протилежної події $\bar{A}$, чим імовірність цікавлячій нас події А. Тоді обчислюють $P(\bar{A})$, віднімають її з одиниці і знаходять:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

Виведемо ще один наслідок правила додавання. Якщо події А и В сумісні ($AB \neq \varnothing$), то

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Доведемо його. Представимо подію А + В як суму трьох несумісних подій

$$A + B = \{A, \text{ але не } B\} + \{B, \text{ але не } A\} + AB = A\bar{B} + B\bar{A} + AB.$$

За правилом додавання

$$P(A + B) = P(A\bar{B}) + P(B\bar{A}) + P(AB).$$

Але

$$A = A\bar{B} + AB; \quad P(A) = P(A\bar{B}) + P(AB);$$

$$B = B\bar{A} + AB; \quad P(B) = P(B\bar{A}) + P(AB);$$

звідки

$$\left.\begin{aligned} P(A\bar{B}) &= P(A) - P(AB), \\ P(B\bar{A}) &= P(B) - P(AB) \end{aligned}\right\}$$

Підставляючи ці вирази, отримаємо

$$P(A + B) = P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) + P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

що і було потрібно довести.

Умовна імовірність події. Правило множення ймовірностей

Умовною імовірністю події В при наявності А називається величина

$$P(B/A) = P(AB)/P(A)$$

Умовну імовірність $P(B/A)$ можна трактувати, як імовірність події В, обчислену за умови (у припущенні), що подія А відбулася.

На практиці формулу $P(B/A) = P(AB)/P(A)$ звичайно читають «у зворотному порядку», для чого записують її у вигляді:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A),$$

тобто *імовірність добутку (перетинання) двох подій дорівнює ймовірності одної з них, помноженої на умовну ймовірність другої при наявності першої*. Сформульоване правило називають *правилом множення ймовірностей*.

Правило множення ймовірностей легко узагальнюється на випадок довільного числа подій:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\, P(A_2/A_1)\, P(A_3/A_1A_2) \ldots P(A_n/A_1A_2 \ldots A_{n-1}),$$

тобто *імовірність добутку декількох подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій, причому ймовірність кожної наступної події обчислюється за умови, що всі попередні мали місце*.

Подія А називається незалежною від події В, якщо її ймовірність не залежить від того, відбулася В чи ні, тобто $P(A/B) = P(A)$.

У противному випадку, якщо $P(A/B) \neq P(A)$, подія А залежить від В.

Приклад1. Випробування – два рази підкидається монета. Подія А - поява герба при першому киданні монети. Подія В - появу герба при другому киданні монети.

Події незалежні.

Приклад 2. Випробування – вибір кулі з урни з двома білими й одною чорною кулями. Подія А - поява білої кулі при першому вийманні. Подія В - появу білої кулі при другому вийманні.

Події залежні.

Залежність і незалежність подій завжди взаємні: якщо А залежить від В, те й В залежить від А, і навпаки.

Доведемо це. Нехай подія A не залежить від B:

$$P(A / B) = P(A).$$

Запишемо правило множення у двох формах:

$$P(AB) = P(A)P(B/A)$$

$$P(AB) = P(B)P(A/B).$$

Звідси, заміняючи в останньому виразі умовну ймовірність P(A/B) на «безумовну» P(A), маємо:

$$P(A)P(B/A) = P(B)P(A),$$

або, припускаючи, що $P(A) \neq 0$, і поділяючи обидві частини рівності на P(A),

$$P(B/A) = P(B),$$

тобто подія B не залежить від A, що і було потрібно довести. У зв'язку з цим можна дати нове визначення незалежних подій:

Дві події називаються незалежними, якщо поява одної з них не змінює ймовірності появи іншої.

Для незалежних подій правило множення ймовірностей приймає особливо простий вигляд:

$$P(AB) = P(A)\,P(B),$$

тобто *імовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій*.

Кілька подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються незалежними, якщо кожна з них не залежить від будь-якої комбінації (добутку) будь-якого числа інших. Для незалежних подій правило множення приймає вигляд:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot \ldots\cdot A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n),$$

або, коротше, користуючись знаком добутку:

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i),$$

тобто *імовірність добутку декількох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій*.

Відзначимо, що коли є кілька подій

$$A_1, A_2, \ldots, A_n,$$

те їхня попарна незалежність (тобто незалежність будь-яких двох подій A_i і A_j із різними індексами) ще не означає їхньої незалежності в сукупності.

Задача. Стрілець робить 3 постріли по одній мішені. Імовірність влучення в кожному пострілі однакова і дорівнює 0.9.

Знайти імовірність того, що в мішені буде:

а) 0 пробоїн (подія – A);

б) 1 пробоїна (подія – B);

в) 2 пробоїни (подія – C);

г) 3 пробоїни (подія – D).

Знайти P(A); P(B); P(C); P(D).

Позначимо:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \text{ – влучення в першому пострілі} \\ A_2 \text{ – влучення в другому пострілі} \\ A_3 \text{ – влучення в третьому пострілі} \end{array}\right\} \text{ події незалежні}$$

$D = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ $\qquad P(D) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0.93 = 0.729$

$A = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$ $\qquad P(A) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = (1 - 0.9)^3 = 0.001$

$B = A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$ $\qquad P(B) = 3 \cdot 0.9 \cdot 0.1^2 = 0.027$

$C = A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ $\qquad P(C) = 3 \cdot 0.9^2 \cdot 0.1 = 0.243$

$P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1$

Моделі надійності технічних систем

Під надійністю системи будемо розуміти ймовірність її безвідмовної роботи за деякий інтервал часу T.

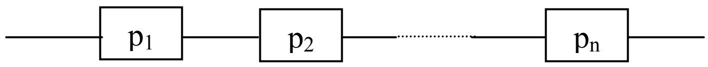
Надійність системи з послідовним з'єднанням елементів.

Послідовним з'єднанням елементів називається таке з'єднання елементів, при якому входом кожного наступного елемента є вихід попереднього.

Будемо вважати, що при послідовному з'єднанні елементів система знаходиться в працездатному стані тільки тоді, коли працюють усі її елементи (відмовлення системи настає тоді, коли відмовляє хоча б один елемент системи).

Позначимо P – надійність усієї системи, p_i – надійність i – го елемента. Визначимо P.

Модель системи з n послідовно з'єднаних елементів



Події:

A – безвідмовна робота системи. P = P(A)

A_i – безвідмовна робота i-го елемента. $P(A_i)=p_i$

$$A = A_1A_2...A_i...A_n$$

$A_1, A_2, ...,A_i, ...,A_n$ – події незалежні, значить

$P(A) = P(A_1)P(A_2)...P(A_i)...P(A_n)$,

або в скороченому виді:

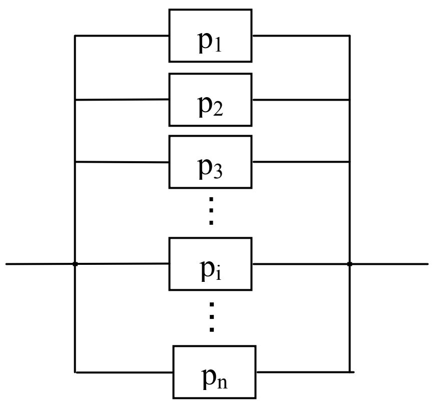
$$P = \prod_{i=1}^{n} p_i$$

Надійність системи з рівнобіжним з'єднанням елементів.

Рівнобіжним з'єднанням елементів називається таке з'єднання елементів, при якому всі елементи мають загальний вхід і загальний вихід.

Будемо вважати, що при рівнобіжному з'єднанні елементів система виходить із ладу, якщо не працюють усі її елементи.

Модель системи з n *рівнобіжно* з'єднаних елементів



Позначимо:

A – система працездатна.

$\bar{A}$ – система відмовила

A_i – безвідмовна робота i-ого елемента

$\bar{A}_i$ – відмовлення i-го елемента

$P(\bar{A}_i) = 1 - P(A_i)$

$P(\bar{A}_i) = 1 - p_i$

$\bar{A} = \bar{A}_1\bar{A}_2 ... \bar{A}_i ... \bar{A}_n$

$\bar{A}_1, \bar{A}_2, ... \bar{A}_i, ... \bar{A}_n$ – події незалежні.

$$P(\overline{A}) = P\left(\prod_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right) = \prod_{i=1}^{n}\left[1 - P(A_i)\right]$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

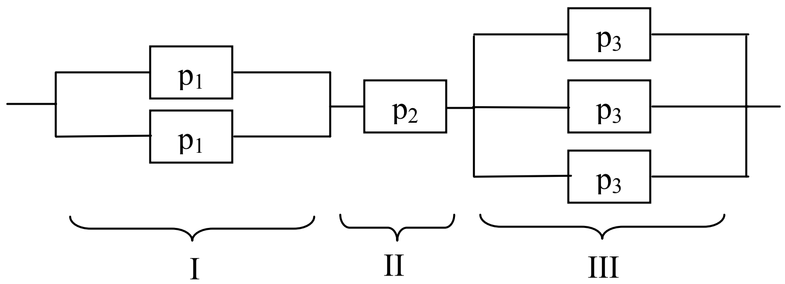
$$\boxed{P = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i)}$$

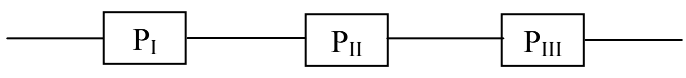
Надійність системи в якій є як послідовно, так і рівнобіжно з'єднані елементи. Для визначення надійності такої системи необхідно:

- розбити систему на кілька підсистем таким чином, щоб вони були з'єднані між собою або послідовно, або рівнобіжно;
- визначити надійність кожної з отриманих підсистем;
- використовуючи відповідну формулу для послідовно або рівнобіжно з'єднаних елементів визначити надійність усієї системи.

Якщо одержувані підсистеми будуть включати як послідовне, так і рівнобіжне з'єднання елементів, то для визначення їхньої надійності застосовують ту ж процедуру, що і для визначення надійності всієї системи.

Задача. Визначити надійність системи P за заданою надійністю окремих елементів.





p_1 – імовірність безвідмовної роботи елементів I блоку

p_2 – імовірність безвідмовної роботи елемента II блоку

p_3 – імовірність безвідмовної роботи елементів III блоку

$$P_I = 1 – (1 - p_1)^2$$

$$P_{II} = p_2$$

$$P_{III} = 1 – (1 – p_3)^3$$

$$P = P_I \cdot P_{II} \cdot P_{III} = [1 – (1 - p_1)^2]\, p_2 [1 – (1 – p_3)^3]$$

Лекція №3

Формула повної ймовірності. Формула Бейеса. Повторення іспитів. Формула Бернуллі. Локальна й інтегральна теореми Лапласа

Формула повної ймовірності

Нехай подія A може відбутися тільки з одною з повної групи несумісних подій (гіпотез):

$$B_1, B_2,...,B_n.$$

Відомі апріорні (до випробування) ймовірності гіпотез:

$$P(B_1), P(B_2),...,P(B_n),$$

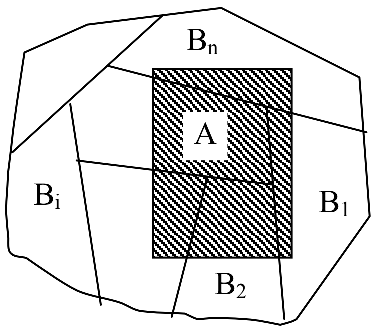
і умовні імовірності:

$$P_{B1}(A), P_{B2}(A),...,P_{Bn}(A_n)$$

Тоді повна, або середня імовірність, події A визначається наступною формулою:

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P_{Bi}(A)}$$

Доведення. Подія A може відбутися тільки або з B_1, або з B_2, ... або з Bn:



$$A = A \cdot B_1 + A \cdot B_2 + ... + A \cdot Bn$$

$$P(A) = P(A \cdot B_1) + P(AB_2) + P(A \cdot Bn) =$$

$$= P(B_1)P_{B1}(A) + ... + P(Bn)P_{Bn}(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{Bi}(A),$$

отже формула справедлива.

Задача. Завод виготовляє прилади, які можуть працювати в одному з трьох режимів. Відомо, що 20% приладів, що випускаються заводом, будуть працювати в I режимі (на півночі); 75% – у II режимі (у середній смузі); 5% – у III режимі (у пустелі).

Імовірність безвідмовної роботи приладу в I режимі 0,9, у II – 0,99; у III – 0,8. Необхідно визначити, скільки відсотків приладів потрібно випустити додатково до плану для заміни приладів, що відмовили.

Примітка. Будемо припускати, що при заміні приладів, вони не відмовляють.

Рішення.

Знайдемо ймовірність відмовлення приладу

Позначимо події: А – безвідмовна робота приладу;

B_1 – прилад працює в I режимі;

B_2 – прилад працює в II режимі;

B_3 – прилад працює в III режимі;

$P(B_1) = 0,2$ $\qquad P_{B1}(A) = 0,9$

$P(B_2) = 0,75$ $\qquad P_{B2}(A) = 0,99$

$P(B_3) = 0,05$ $\qquad P_{B3}(A) = 0,8$

$P(\bar{A})$ –? т.к. $P(\bar{A})\cdot 100\%$ — рішення, яке шукається.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{Bi}(A) = 0.2\cdot 0.9 + 0.75\cdot 0.99 + 0.05\cdot 0.8 = 0.18 + 0.7425 + 0.04 =$$

$$= 0.9625$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.9625 = 0.0375$$

$$\boxed{0.0375 \cdot 100\% = 3.75\%}$$

Формула Бейеса

Нехай подія А може відбутися тільки з однією з повної групи несумісних подій (гіпотез):

$$B_1, B_2, ..., B_n.$$

Відомі апріорні (до іспиту) ймовірності гіпотез:

$$P(B_1), P(B_2), ..., P(B_n)$$

і умовні ймовірності

$$P_{B1}(A), P_{B2}(A), ..., P_{Bn}(A).$$

Відомо також, що в результаті іспиту подія А відбулася, тоді апостеріорна (після іспиту) ймовірність кожної і-ої гіпотези визначається наступною формулою:

$$\boxed{P_A(B_i) = \frac{P(Bi)\cdot P_{Bi}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(Bi)P_{Bi}(A)}}$$

Ця формула називається формулою Бейеса або теоремою гіпотез.

Доказ.

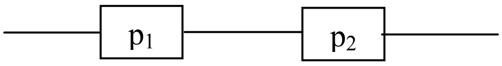
Знайдемо ймовірність добутку двох подій A и B_i

$P(A \cdot B_i) = P(A) \cdot P_A(B_i)$

$P(A \cdot B_i) = P(B_i) \cdot P_{Bi}(A)$

$$P_A(B_i) = (P(B_i)\, P_{Bi}(A))/P(A) = \frac{P(Bi)P_{Bi}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(Bi)P_{Bi}(A)}$$

Задача. Нехай система складається з двох послідовно з'єднаних елементів, надійності яких задані.



$p_1 = 0.9$

$p_2 = 0.95$

У результаті випробування стало відомо, що система відмовила. Знайти ймовірність того, що відмовив 1-й елемент, а 2-й – справний.

Рішення. Позначимо події:

B_0 – обидва елементи справні.

B_1 – 1-й відмовив, 2-й справний.

B_2 – 1-й справний, 2-й відмовив.

B_3 – обоє відмовили.

A – відмова системи.

$P(B_0) = p_1 \cdot p_2 = 0.9 \cdot 0.95 = 0.855$ $\qquad P_{B0}(A) = 0$

$P(B_1) = (1 - p_1)p_2 = 0.1 \cdot 0.95 = 0.095$ $\qquad P_{B1}(A) = 1$

$P(B_2) = p_1(1 - p_2) = 0.9 \cdot 0.05 = 0.045$ $\qquad P_{B2}(A) = 1$

$P(B_3) = (1 - p_1)(1 - p_2) = 0.1 \cdot 0.05 = 0.005$ $\qquad P_{B3}(A) = 1$

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{\sum_{i=0}^{3} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)} =$$

$$= 0.095 \cdot 1/(0.855 \cdot 0 + 0.095 \cdot 1 + 0.045 \cdot 1 + 0.05 \cdot 1) = 0.095/0.145 \approx 0.655$$

Формула Бернуллі

Нехай виконується n іспитів, у кожному з яких може відбутися деяка подія А. Іспити називаються незалежними, якщо ймовірність появи події А в будь-якому іспиті не залежить від результатів інших іспитів.

Нехай виконується n <u>незалежних</u> іспитів, у кожному з яких може відбутися деяка подія А. Імовірність появи події А в кожному іспиті <u>однакова</u> і дорівнює р. Тоді ймовірність того, що в n іспитах подія А відбудеться рівно m раз визначається по формулі:

$$\boxed{P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}}$$

Ця формула називається формулою Бернуллі.

Обгрунтування формули.

Імовірність однієї складної події, яка полягає в тому, що в n випробуваннях подія А наступить m раз і не наступить n – m раз, за теоремою множення імовірностей незалежних подій дорівнює $p^m q^{n-m}$ (де q – імовірність того, що подія А не наступить у результаті одного випробування, q = 1 – р). Таких складних подій може бути стільки, скільки можна скласти сполучень із n елементів по m елементів, тобто C_n^m. Тому що ці складні події несумісні, то за теоремою додавання ймовірностей несумісних подій імовірність, яку ми шукаємо, дорівнює сумі імовірностей усіх можливих складних подій. Оскільки ж імовірності всіх цих складних подій однакові, то імовірність, яку ми шукаємо, (поява m раз події А у n іспитах) дорівнює імовірності однієї складної події, помноженої на їхнє число.

B_m – подія А відбулося m раз у n випробуваннях.

$$B_m=\underbrace{\overset{1}{A}\cdot\overset{2}{A}\cdot\overset{3}{A}\overset{\ldots}{\ldots}\overset{m}{A}}_{m}\,\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{n-m}+\overset{1}{A}\cdot\overset{2}{A}\cdot\overset{3}{A}\ldots\cdot\overset{m-1}{A}\cdot\bar{A}\cdot\bar{A}\cdot\bar{A}\ldots\bar{A}\cdot\overset{n}{A}+\underbrace{\bar{A}\cdot\bar{A}\cdot\bar{A}\ldots\cdot\bar{A}}_{n-m}\,\underbrace{\overset{n-m+1}{A}\;A\ldots\overset{n}{A}}_{m}$$

$P(B_m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$

$P_n(m) = P(B_m)$

Задача. Для контролю відібрано 5 виробів. Імовірність дефекту в кожному виробі 0.01. визначити ймовірність того, що в двох з відібраних виробів виявиться дефект.

$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0.01^2(1 - 0.01)^3 = 5!/(3!2!) \cdot 0.0001{\cdot}0.99^3 =$

$= 0.001{\cdot}0.99^3 = 0.099^3 = 0.00097$

Задача. Імовірність появи події А в одному випробуванні дорівнює 0.9. Знайти ймовірність того, що в 15 незалежних випробуваннях подія А відбудеться 7 разів.

$P_{15}(7) = C^7{}_{15}p^7(1-p)^8 = 15!/(8!7!) \cdot 0.97 \cdot 0.18 = 3 \cdot 11 \cdot\ 13 \cdot 15 \cdot 0.97 \cdot 0.18 = 0.000030778$

Локальна теорема Лапласа

Нехай виконується n незалежних випробувань, у кожному з яких з імовірністю p може відбутися деяка подія А. При великому числі іспитів n імовірність того, що в n випробуваннях подія А відбудеться рівно m раз може бути оцінена (тим точніше, чим більше n) за допомогою наступної формули:

$$\boxed{P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{(npq)}} \qquad q = 1 - p \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Для функції φ(x) побудована таблиця значень.

φ(-x) = φ(x) — функція парна.

При x> 4 φ(x) = 0

Для попередньої задачі:

√(npq) = √(15 · 0.9 · 0.1) = 1.16

x = (7 – 15 · 0.9)/ √(npq) = (7 – 15 · 0.9)/ 1.16 =(7 – 13.5)/ 1.16 = - 5.6

$P_{15}(7) = 1/1.16 \cdot \varphi(-5.6) = 0.86 \cdot 0 = 0.$

Інтегральна теорема Лапласа

Нехай виконується n незалежних випробувань, у кожному з яких з імовірністю p може відбутися деяка подія А.

При великих n імовірність того, що в n іспитах подія А відбудеться не менше, ніж k_1, і не більше, ніж k_2 разів може бути оцінена (тим точніше, чим більше n) за допомогою наступної формули:

$$\boxed{P_n(k_1, k_2) = \int_{x'}^{x''} \varphi(x)dx = \Phi(x'') - \Phi(x')}$$

де $x' = (k_1 - np)/ \sqrt{(npq)}$

$x'' = (k_2 - np)/ \sqrt{(npq)}$ $\qquad q = 1 - p$

$\Phi(x) = 1/\sqrt{2\pi}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ функція Лапласа (значення функції визначається по таблиці)

$\Phi(-x) = -\Phi(x)$ – непарна функція.

Для $x \geq 5$ $\quad \Phi(x) = 0.5$

Найвірогідніше число настання подій.

Число k_0 (настання події в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких імовірність появи події дорівнює p) називають <u>найвірогіднішим</u>, якщо імовірність того, що подія наступить у цих іспитах k_0 разів перевищує (або, принаймні, не менше) імовірності інших можливих результатів випробувань.

Найвірогідніше число k_0 визначають з подвійної нерівності

$$np - q \leq k_0 \leq np + p \qquad q = 1 - p$$

або по формулі

$$k_0 = [(n + 1)p],$$

де квадратні дужки позначають цілу частину числа.

Лекція № 4

Випадкові величини. Визначення і форми задання законів розподілу. Числові характеристики

Визначення випадкової величини

<u>*Випадкова величина*</u> – це величина, яка у результаті випробування приймає заздалегідь невідоме значення.

Приклади:

1. Кількість студентів, що є присутніми на лекції.
2. Кількість будинків, зданих в експлуатацію в поточному місяці.
3. Температура навколишнього середовища.
4. Вага осколка снаряда, що розірвався.

Випадкові величини поділяються на дискретні й безперервні.

Дискретною (перериваною) називають випадкову величину, що приймає окремі, ізольовані друг від друга значення з визначеними ймовірностями.

Число можливих значень дискретної випадкової величини може бути кінцевим або рахунковим.

Безперервною називають випадкову величину, що може приймати будь-як значення з деякого кінцевого або нескінченного проміжку.

Очевидно, число можливих значень безперервної випадкової величини нескінченно.

У наведених прикладах: 1 і 2 – дискретні випадкові величини, 3 і 4 – безперервні випадкові величини.

Як правило, випадкові величини позначають великими буквами латинського алфавіту, а їхні можливі значення – маленькими.

У теоретико-множинному трактуванні основних понять теорії ймовірностей випадкова величина X є функція елементарної події: $X = \varphi(\omega)$, де ω – елементарна подія, що належить простору Ω ($\omega \in \Omega$). При цьому множина Ξ можливих значень випадкової величини X складається з усіх значень функції $\varphi(\omega)$.

Законом розподілу випадкової величини називається будь-яке правило (таблиця, функція), що дозволяє знаходити імовірності всіляких подій, зв'язаних із випадковою величиною (наприклад, імовірність того, що вона прийме якесь значення або потрапить на якийсь інтервал).

Форми завдання законів розподілу випадкових величин

Ряд розподілу

Це таблиця у верхньому рядку якої перераховані в порядку зростання всі можливі значення випадкової величини X: x_1, x_2, ..., x_n, а в нижньому – імовірності цих значень: $p_1, p_2, ..., p_n$, де $p_i = P\{X = x_i\}$.

X	x_1	x_2	......	x_n
P	p_1	p_2	......	p_n

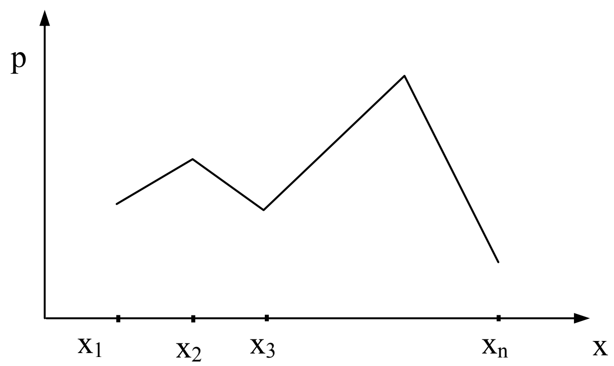
Тому що події $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ... несумісні й утворюють повну групу, то сума всіх імовірностей, що розташовані у нижньому рядку ряду розподілу, дорівнює одиниці

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Ряд розподілу використовується для завдання закону розподілу тільки дискретних випадкових величин.

Багатокутник розподілу

Графічне зображення ряду розподілу називається багатокутником розподілу. Будується він так: для кожного можливого значення випадкової величини відновлюється перпендикуляр до осі абсцис, на якому відкладається ймовірність даного значення випадкової величини. Отримані крапки для наочності (і тільки для наочності!) з'єднуються відрізками прямих.



Інтегральна функція розподілу (або просто функція розподілу)

Це функція, що при кожнім значенні аргументу x чисельно дорівнює ймовірності того, що випадкова величина X виявиться менше, ніж значення аргументу x. Функція розподілу позначається F(x): $\boxed{F(x) = P\{X < x\}}$.

Тепер можна дати більш точне визначення безперервної випадкової величини: випадкову величину називають безперервною, якщо її функція розподілу є безперервна, кусочно-диференційована функція з безперервною похідною.

Функція розподілу – це найбільш універсальна форма завдання випадкової величини, що може використовуватися для завдання законів розподілу як дискретних, так і безперервних випадкових величин.

Властивості інтегральної функції розподілу.

Властивість 1. *Значення функції розподілу належать відрізку* [0, 1];

$$0 \le F(x) \le 1.$$

Властивість випливає з визначення функції розподілу як імовірності.

Властивість 2. *F(x) – не убутна функція,* тобто

$$F(x_2) \ge F(x_1), \text{ якщо } x_2 > x_1.$$

Доведення. Нехай $x_2 > x_1$. Подію, що складається в тім, що X прийме значення, менше x_2, можна підрозділити на наступні дві несумісні події: 1) X прийме значення менше x_1, з імовірністю $P\{X<x_1\}$; 2) X прийме значення, яке задовольняє нерівності: $x_1 \le X < x_2$, з імовірністю $P\{x_1 \le X < x_2\}$. За правилом додавання маємо

$$P\{X<x_2\} = P\{X<x_1\} + P\{x_1 \le X < x_2\},$$

Звідси

$$P\{X<x_2\} - P\{X<x_1\} = P\{x_1 \le X < x_2\},$$

або

$$F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 \le X < x_2\}. \qquad (*)$$

Тому що імовірність є число ненегативне, то $F(x_2) - F(x_1) \ge 0$ або $F(x_2) \ge F(x_1)$, що і було потрібно довести.

Наслідок 1. *Імовірність того, що* випадкова величина *буде мати значення, укладене в інтервалі (a, b), дорівнює збільшенню функції розподілу на цьому інтервалі:* $P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a)$.

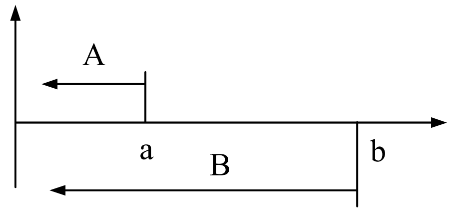
Цей наслідок випливає з формули (*), якщо покласти $x_1 = a$, $x_2 = b$.

A – подія $X < a$

B – подія $X < b$

C – подія $a \le X < b$

A + C= B



Наслідок 2. *Імовірність того, що безперервна випадкова величина X прийме одне визначене значення, дорівнює нулю.*

$$P\{X = a\} = \lim_{b\to a} P\{a \le X < b\} = \lim_{b\to a}\{F(b) - F(a)\} = 0$$

У силу безперервності F(x) у точці «а» різниця F(b) – F(a) також прагне до нуля, отже $P\{X = a\} = 0$.

Використовуючи це положення, легко переконатися у справедливості рівностей:

$$P\{a \le X < b\} = P\{a < X < b\} = P\{a < X \le b\} = P\{a \le X \le b\}.$$

Наприклад, рівність $P\{a < X \le b\} = P\{a < X < b\}$ доводиться так:

$P\{a < X \le b\} = P\{a < X < b\} + P\{X = a\} = P\{a < X < b\}$.

Властивість 3. *Якщо можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a, b), то: 1) F(x) = 0 при $x \le a$; 2) F(x) = 1 при $x > b$.*

Доведення. 1. Нехай $x_1 \le a$. Тоді подія $X < x_1$ неможлива (тому що значень, менших x_1 величина X за умовою не приймає), отже імовірність події $X < x_1$ дорівнює нулю.

2. Нехай $x_2 > b$. Тоді подія $X < x_2$ достовірна (тому що всі можливі значення X менше x_2) і, отже, імовірність події $X < x_2$ дорівнює одиниці.

Наслідок. *Якщо можливі значення безперервної випадкової величини розташовані на всій осі x, то справедливі наступні граничні співвідношення:*

$$F(-\infty) = P\{X < -\infty\} = 0;$$

$$F(\infty) = P\{X < \infty\} = 1.$$

Задача. Побудувати ряд розподілу, багатокутник розподілу і функцію розподілу для випадкової величини X, де X – кількість будинків зданих вчасно з 4-х споруджуваних, якщо ймовірність побудувати будинок вчасно для кожного будинку однакова і дорівнює 0.9.

Рішення. За умовою задачі здійснюється чотири незалежних іспити (іспит – будівництво будинку), в кожному з яких може відбутися подія « будинок побудовано вчасно » з однієї і тією же ймовірністю 0.9. Тому для визначення ймовірності конкретного числа будинків, побудованих вчасно застосовуємо формулу Бернуллі. Випадкова величина X може приймати значення: 0, 1, 2, 3, 4.

$P_0 = P\{X = 0\} = C_4^0 \cdot 0.90 \cdot 0.14 = 0.14,$

$P_1 = P\{X = 1\} = C_4^1 \cdot 0.9 \cdot 0.13 = 4 \cdot 0.9 \cdot 0.13 = 0.0036,$

$P_2 = P\{X = 2\} = C_4^2 \cdot 0.92 \cdot 0.12 = 0.0486,$

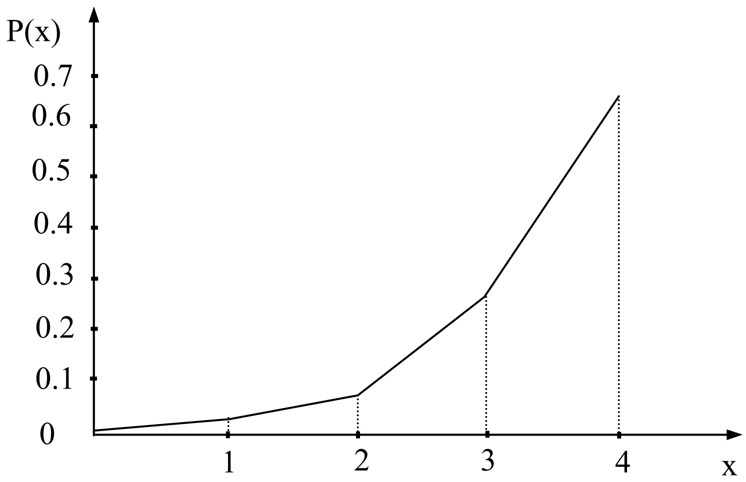
$P_3 = P\{X = 3\} = C_4^3 \cdot 0.93 \cdot 0.1 = 0.2916,$

$P_4 = P\{X = 4\} = C_4^4 \cdot 0.94 \cdot 0.10 = 0.6561.$

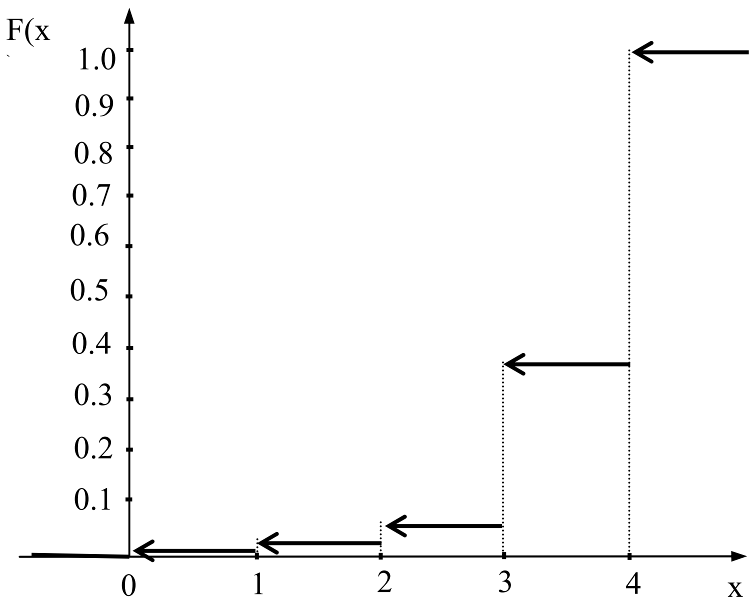
1) ряд розподілу

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0.0001	0.0036	0.0486	0.2916	0.6561

2) рагатокутник розподілу



3) функція розподілу



x≤ 0 $F(x) = P(X < x) = 0$

0< x≤ 1 $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) = 0.0001$

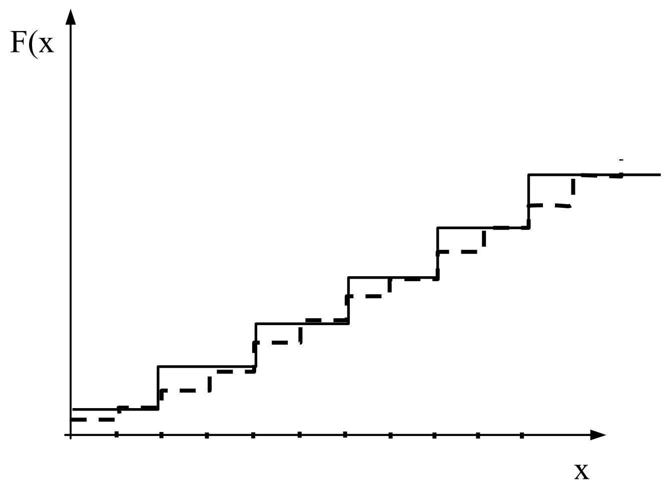
1< x≤ 2 $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) =0.0037$

2<x≤ 3 $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.0523$

3< x≤ 4 $F(x) = P\{X(x\} = P\{X=0\} + P\{X=1\}+ P\{X=2\}+ P\{X=3\}= 0.3439$

4< x< ∞ $F(x) = 1$

Для дискретної випадкової величини функція розподілу є кусочно-постійною функцією. При збільшенні числа значень випадкової величини число сходинок на графіку зростає, а їхня висота зменшується. При $n \to \infty$ кусочно-постійна функція перетворюється в безперервну функцію.



Щільність розподілу ймовірностей

Безперервну випадкову величину можна задати, використовуючи функцію, що називають щільністю розподілу або щільністю ймовірності, або диференціальною функцією розподілу.

Щільністю розподілу ймовірностей безперервної випадкової величини X називають функцію f(x) – першу похідну від функції розподілу F(x):

$$\boxed{f(x) = F'(x)}$$

З цього визначення випливає, що функція розподілу є первісною для щільності розподілу.

Для опису розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини щільність розподілу не може бути застосовна.

Імовірнісний зміст щільності розподілу.

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{F(x + \Delta x) - F(\Delta x)}{\Delta x}\right)$$

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{P\{X \in [x, x + \Delta x]\}}{\Delta x}\right)$$

Таким чином, ліміт відносини ймовірності того, що безперервна випадкова величина прийме значення, що належить інтервалу (x, x +Δx), до довжини цього інтервалу (при Δx → 0), дорівнює значенню щільності розподілу в точці x.

Функція щільності характеризує кожне значення безперервної випадкової величини окремо, а не цілий діапазон. як це має місце для функції розподілу.

Імовірність влучення безперервної випадкової величини у заданий інтервал. За формулою Ньютона – Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x) = F(b) - F(a)$$

$$P\{a < X < b\} = F(b) - F(a),$$

у такий спосіб

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Визначення функції розподілу по відомій функції щільності.
Нехай в попередній формулі a = -∞, b = x, і замінивши змінну інтегрування x на t маємо:

$$P\{-\infty < X < x\} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$F(x) = P\{X < x\}=P\{-\infty< X < x\},$$

отже

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Властивості щільності розподілу

Властивість 1. *Щільність розподілу – невід'ємна функція:* $f(x) \geq 0$ (тому що інтегральна функція розподілу – не убутна функція, а щільність розподілу її перша похідна).

Властивість 2: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Доведення. Невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ виражає ймовірність події, що складається в тому, що випадкова величина приймає значення, що належать інтервалу (-∞, ∞). Очевидно, така подія достовірна, отже, імовірність. Іі дорівнює одиниці.

Геометрично це означає, що вся площа криволінійної трапеції, обмежена віссю 0x і кривій розподілу, дорівнює одиниці.
Зокрема, якщо всі можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a, b), то $\int_a^b f(x)dx = 1$.

Можливий графік щільності розподілу (приклад)

Числові характеристики випадкових величин

Дані характеристики дозволяють вирішувати багато задач, не знаючи закону розподілу випадкових величин.

Характеристики положення випадкової величини на числовій осі.

1. *Математичне чекання* це є середнє зважене значень випадкової величини X, в яке абсциса кожної точки x_i входить з «вагою», рівною відповідної імовірності.

Математичне чекання іноді називають просто середнім значенням випадкової величини.

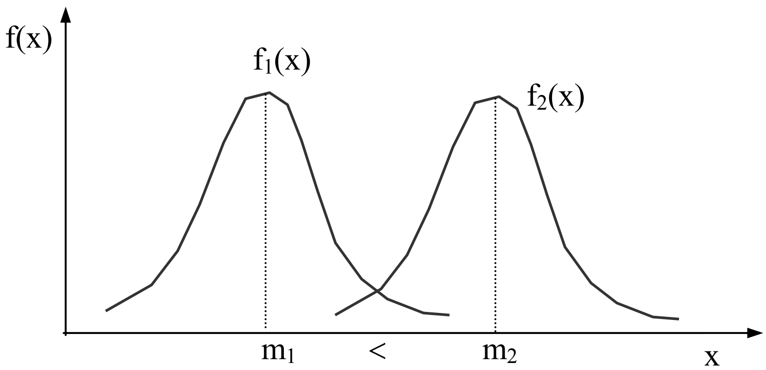
Позначення: m_x або M [X].

Для дискретної випадкової величини

$$\boxed{M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i}$$

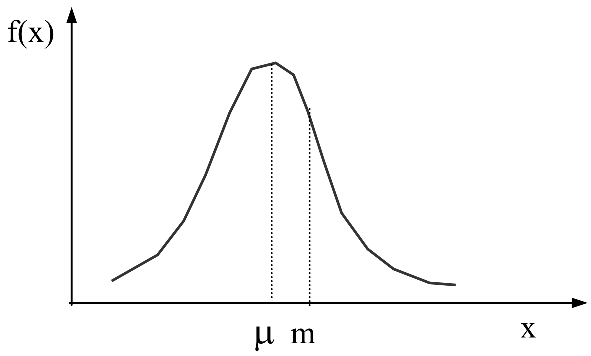
Для безперервної випадкової величини

$$\boxed{M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx}$$



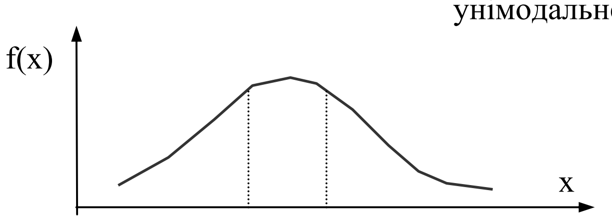
2. *Мода* – це найбільш ймовірне значення випадкової величини (те для якого ймовірність p_i, або щільність розподілу f(x) досягає максимуму).

Позначення: μ

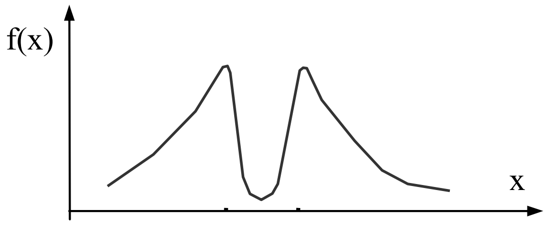


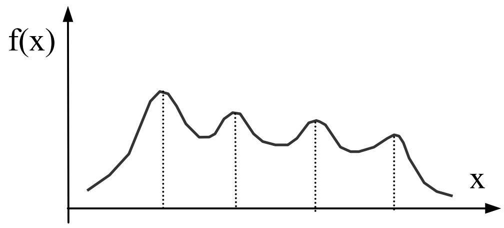
Розрізняють унімодальні розподіли (мають одну моду), полімодальні розподіли (мають кілька мод) і анімодальні (не мають моди).

унімодальне

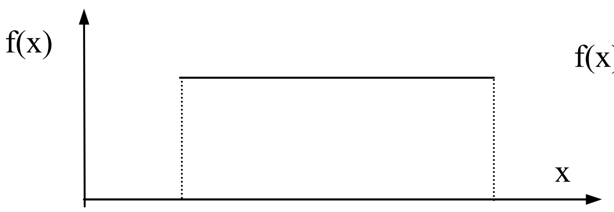


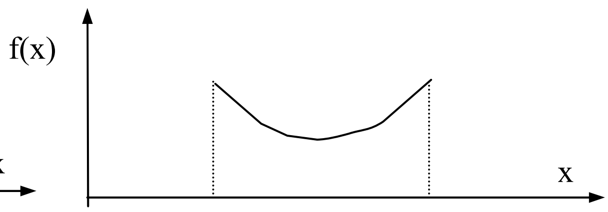
полімодальні





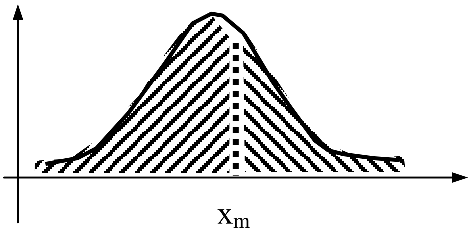
анімодальні





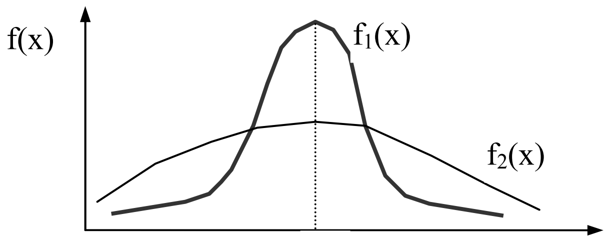
3. *Медіана* – це таке значення випадкової величини x_m, для якого виконується наступна рівність:

$$\boxed{P\{X < x_m\} = P\{X > x_m\}}$$



Медіана поділяє площу,обмежену f(x), навпіл.

Якщо щільність розподілу випадкової величини симетрична й унімодальна, то M[X], μ і x_m збігаються



M[X], μ, x_m – невипадкові величини.

Моменти випадкових величин

Для характеристики різних властивостей випадкових величин використовують початкові і центральні моменти.

Початковим моментом k-го порядку випадкової величини X називається математичне чекання k-го ступеня цієї величини:

$$\alpha_k = M\,[X^K].$$

для дискретної випадкової величини:

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i \ ,$$

для безперервної випадкової величини:

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx \, .$$

Центрованою випадковою величиною називається відхилення випадкової величини від її математичного чекання:

$$\overset{0}{X} = X - M[X].$$

Умовимося відрізняти центровану випадкову величину значком ^{0} нагорі.

Центральним моментом S-го порядку називається математичне чекання S-го ступеня центрованої випадкової величини:

$$\mu_S = M\,[(X - m_x)^S].$$

Для дискретної випадкової величини:

$$\mu_S = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^S p_i.$$

Для безперервної випадкової величини:

$$.\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^s f(x)dx$$

<u>Властивості моментів випадкових величин</u>

1) початковий момент першого порядку дорівнює математичному чеканню (по визначенню):

$$\alpha_1 = M\,[X^1] = m_x.$$

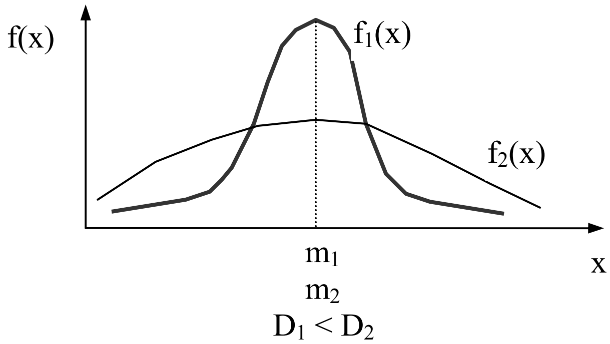
2) центральний момент першого порядку завжди дорівнює нулю (доведемо на прикладі дискретної випадкової величини):

$$\mu_1 = M\,[(X - m_x)^1] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)\,p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\,p_i - \sum_{i=1}^{m} m_x\,p_i = m_x - m_x \sum_{i=1}^{n} p_i = m_x - m_x = 0.$$

3) центральний момент другого порядку характеризує розкид випадкової величини навколо її математичного чекання:

$$\mu_2 = M\left[(X - m_x)^2\right] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_x)^2 f(x)dx \end{cases}$$

Центральний момент другого порядку називається *дисперсією* випадкової величини і позначається D[X] або D_x



Дисперсія має розмірність квадрату випадкової величини.

4) *Середнє квадратичне відхилення*

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}.$$

σ_x – також як і D_x характеризує розкид випадкової величини навколо її математичного чекання але має розмірність випадкової величини.

5) другий початковий момент α_2 характеризує ступінь розкиду випадкової величини навколо її математичного чекання, а також зсув випадкової величини на числовій осі

$$\alpha_2 = M\left[X^2\right] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 p_i \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx \end{cases}$$

Зв'язок першого і другого початкових моментів із дисперсією (на прикладі безперервної випадкової величини):

$$D_x = M\left[(X - m_x)^2\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^2 f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - 2m_x \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx +$$

$$+ m_x^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \alpha_2 - 2m_x^2 + m_x^2$$

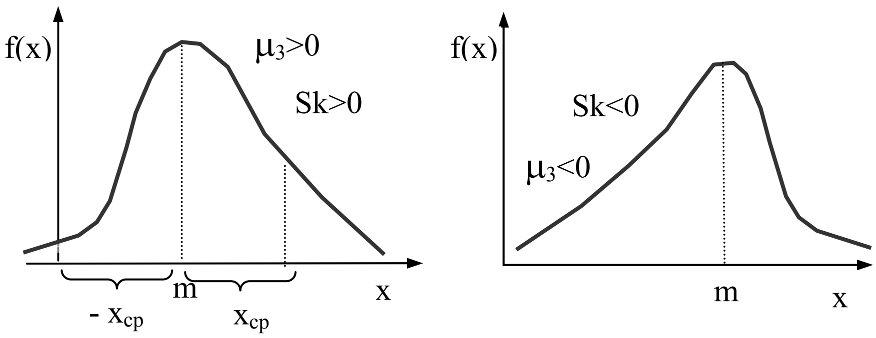
$$\boxed{D_X = \alpha_2 - m_x^2}$$

$$\boxed{\alpha_2 = D_X + m_x^2}$$

Ці формули мають велике значення для розв’язування задач

6) третій центральний момент характеризує ступінь розкиду випадкової величини навколо математичного чекання, а також ступінь асиметрії розподілу випадкової величини.

$$\mu_3 = M\left[(X - m_x)^3\right] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^3 p_i \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_x)^3 f(x) dx \end{cases}$$



$f(x_{cp}) > f(-x_{cp})$

Для симетричних законів розподілу $\mu_3 = 0$.

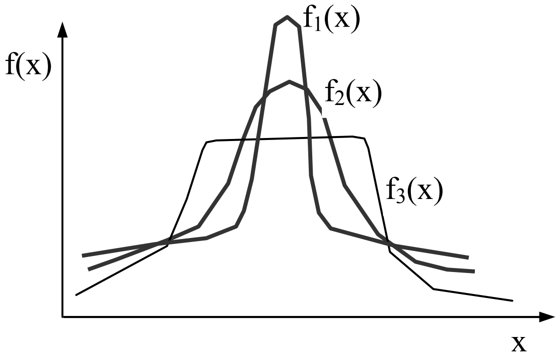
Для характеристики тільки ступеня асиметрії використовують так званий коефіцієнт асиметрії:

$$Sk = \mu_3 / \sigma^3$$

Для симетричного закону розподілу $Sk = 0$

7) четвертий центральний момент характеризує ступінь розкиду випадкової величини навколо математичного чекання, а також ступінь островершинності закону розподілу:

$$\mu_4 = M\left[(X - m_x)^4\right] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^4 p_i \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_x)^4 f(x) dx \end{cases}$$



$\varepsilon_{x1} > \varepsilon_{x2} > \varepsilon_{x3}$
$\varepsilon_{x2} = 0$

Для характеристики тільки ступеня островершинності розподілу використовується *ексцес* (позначається ε_x):

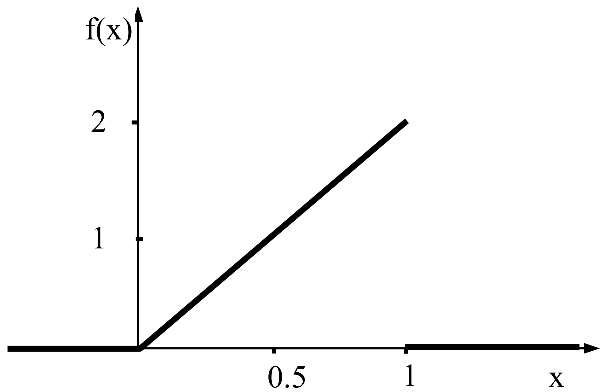
$$\varepsilon_x = \mu_4 / \sigma^4 - 3$$

$\varepsilon_{x2} = 0$;(нормальний закон розподілу) $\varepsilon_{x1} > 0$; $\varepsilon_{x3} < 0$.

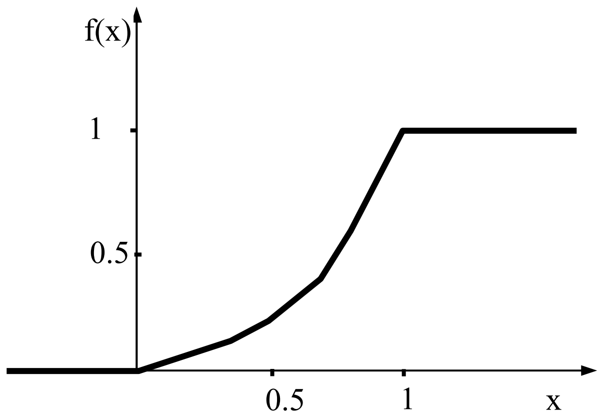
Задача. Випадкова величина X задана щільністю розподілу імовірності

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \\ 2x, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Знайти: $F(x)$, m_x, α_2, D_x, σ_x і побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$.



$$F(x)=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0, \quad \text{если } x<0\\ \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int\limits_{0}^{x} 2t\,dt = x^2, \quad \text{если } 0\le x\le 1\\ \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int\limits_{0}^{1} 2t\,dt + \int\limits_{1}^{x} 0\,dt = t^2\Big|_0^1 = 1, \quad \text{если } x>1\end{cases}$$



Математичне чекання:

$$m_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int\limits_{0}^{1} x\cdot 2x\,dx = \left(\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Другий початковий момент:

$$\alpha_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int\limits_{0}^{1} x^2\cdot 2x\,dx = \left(\frac{x^4}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Дисперсія: $D_x = \alpha_2 - m_x^2 = 1/2 - 4/9 = 1/18$

Середнє квадратичне відхилення: $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{(1/18)} = \sqrt{2}/6$.

Лекція № 5

Закони розподілу випадкових величин

Закон розподілу дискретної випадкової величини

Біноміальний закон розподілу

Нехай виконується n незалежних випробувань, у кожному з яких з імовірністю p може відбутися деяка подія A.

Випадкова величина X (число випробувань у яких відбулася подія A) розподілена по біноміальному законі з рядом розподілу:

$$\boxed{P\{X = m\} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}}$$

x_i	0	1	…	m	…	n
p_i	$(1-p)^n$	$np(1-p)^{n-1}$	…	$C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$	…	p^n

$P\{X = m\} = P_n(m)$ – обчислюється по формулі Бернуллі.

$[p + (1-p)]^n = 1$

$[p + (1-p)]^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ (біном Ньютона)

$\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = 1$

Приклад: визначити імовірність того, що $\{1 \le X \le 3\}$

$P\{1 \le X \le 3\} = \sum_{i=1}^{3} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

Числові характеристики біноміального закону.

Математичне чекання

Розглянемо випадкову величину X_i – число появ подій A в i-ому випробуванні

X_i	0	1
P	1-p	p

$m_i = 0(1-p) + 1 \cdot p = p$

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$M[X] = M[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} M[X_i] = np$

(тому що математичне чекання суми випадкових величин дорівнює сумі їхніх математичних чекань).

Другий початковий момент і дисперсія:

$\alpha_{2i} = 0^2(1-p) + 1^2 \cdot p = p;$

$D_i = \alpha_{2i} - m_{Xi}^2 = p - p^2 = p(1-p);$

$$D[X] = D[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i] = np(1-p);$$

(тому що дисперсія суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі їхніх дисперсій).

Середнє квадрвтичне відхилення:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{(np(1-p))}.$$

Закони розподілу безперервних випадкових величин

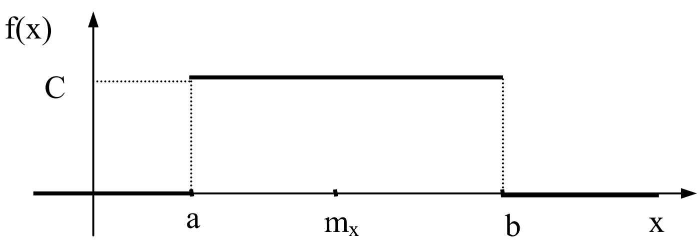
Рівномірний закон розподілу.

Випадкова величина розподілена за рівномірним законом, якщо її щільність розподілу має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} c, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

Властивість щільності: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_a^b c\,dx = 1 \qquad c(b-a) = 1 \qquad c = \frac{1}{b-a}$$

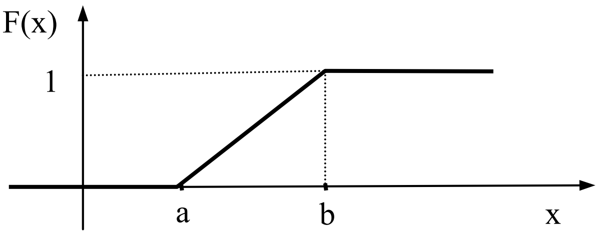


Приклад рівномірно розподіленої випадкової величини – час чекання на зупинці при заданому інтервалі руху.

Знайдемо інтегральну функцію рівномірно розподіленої випадкової величини

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$F(x)=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{x}0\,dt=0; \quad x<a;\\ \int\limits_{-\infty}^{a}0\,dt+\int\limits_{b}^{x}\frac{1}{b-a}dt=\frac{x-a}{b-a}; \quad a\le x\le b;\\ \int\limits_{-\infty}^{a}0\,dt+\int\limits_{a}^{b}\frac{1}{b-a}dt+\int\limits_{b}^{\infty}0\,dt=1; \quad x>b;\end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases}0; \quad x<a\\ \frac{x-a}{b-a}; \quad a\le x\le b\\ 1; \quad x>b\end{cases}$$



Числові характеристики.

Математичне чекання $m_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)dx$:

$$m_x = \int\limits_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Другий початковий момент: $\alpha_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$:

$$\alpha_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b = \frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

Дисперсія $\quad D_x = \int\limits_a^b (x-m_x)^2\frac{1}{b-a}dx = \alpha_2 - m_x^2$

$D_x = (b^2 + ab + a^2)/3 – (a^2 + 2ab + b^2)/4 = (b^2 – 2ab + a^2)/12 = (b – a)^{2/12}$

Середнє квадратичне відхилення

$\sigma_x = \sqrt{D_x} = (b – a)/(2\sqrt{3})$

Імовірність улучення рівномірно розподіленої випадкової величини на заданий інтервал:

$P\{\alpha \le X \le \beta\}$ – ? $\qquad [\alpha, \beta] \subset [a,b]$

Перший спосіб

$P\{\alpha \le X \le \beta\} = F(\beta) – F(\alpha) == (\beta – a)/(b – a) – (\alpha – a)/(b – a) = (\beta – \alpha)/(b – a)$

Другий спосіб:

$$P\{\alpha \le X \le \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} x\, f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a} dx = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$$

Приклад: X – рівномірно розподілена на відрізку [3,8] випадкова величина. Знайти $P\{6 \le X \le 7\}$.

$P\{6 \le X \le 7\} = (7-6)/(8-3) = 1/5.$

Показовий закон розподілу

Випадкова величина T розподілена за показовим законом, якщо її функція щільності має вигляд

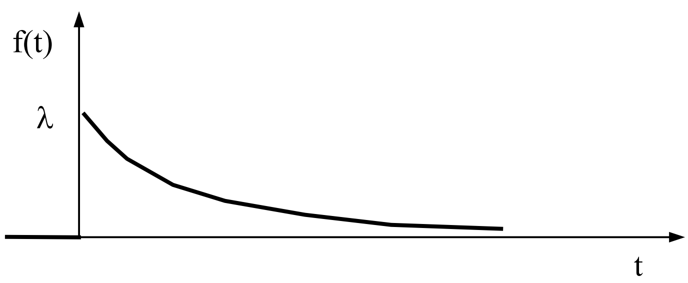
$$f(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t \ge 0 \end{cases} \qquad \lambda = \text{const} > 0.$$

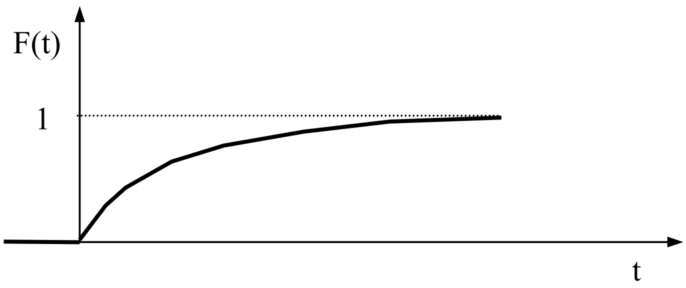
Функція розподілу $$F(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx, & t \ge 0 \end{cases}$$

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda(-1/\lambda)e^{-\lambda x}|_0^t = -e^{-\lambda t} + 1 = 1 - e^{-\lambda t}, & t \ge 0 \end{cases}$$

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \ge 0 \end{cases}$$

Побудуємо графіки щільності розподілу й функції розподілу:





Числові характеристики

Математичне чекання: $m_x = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$

$\int u dv = uv - \int v du$ $\qquad u = -t$

$dv = -\lambda e^{-\lambda t} dt,$ $\qquad v = e^{-\lambda t}$

$\int t\lambda e^{-\lambda t} dt = -te^{-\lambda t} + \int e^{-\lambda t} dt = -te^{-\lambda t} - 1/\lambda \cdot e^{-\lambda t}$

$m_t = -[te^{-\lambda t} + 1/\lambda \cdot e^{-\lambda t}]|_0^\infty = 1/\lambda.$

Дисперсія

$$D_t = \int_0^t \left(t - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^2}$$

Середнє квадратичне відхилення: $\sigma_t = \frac{1}{\lambda}$

Імовірність улучення випадкової величини на задану ділянку

$P\{a \le T \le b\}$ –? $\qquad [a, b] \subset [0, \infty)$

$P\{a \le T \le b\} = F(b) - F(a) = [1 - e^{-\lambda b}] - [1 - e^{-\lambda a}] = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

Приклад. Випадкова величина розподілена за показовим законом з $\lambda = 1/2$

$P\{4 \le X \le 10\}$ –?

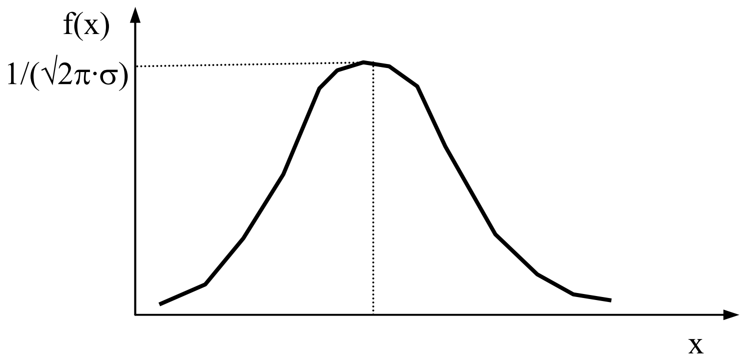
$P = e^{-4/2} - e^{-10/2} = 0.1353 - 0.0067 = 0.1286.$

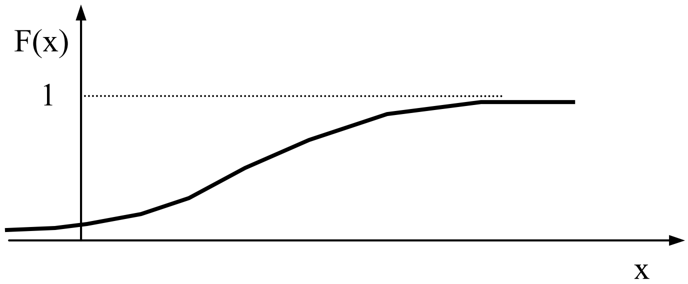
Нормальний закон розподілу (закон Гаусса).

Випадкова величина розподілена за нормальним законом, якщо щільність розподілу має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

$m = \text{const},$ $\qquad \sigma = \text{const} > 0.$





$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Числові характеристики:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{\left(x-m^2\right)}{2\sigma^2}} dx = m,$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2 \qquad \sigma_x = \sigma.$$

Імовірність влучення нормально розподіленої випадкової величини на заданий відрізок [a, b].

Розв’язання цієї задачі може бути здійснено двома шляхами

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ P\{a \le X \le b\} = \int_a^b f(x)dx \\ 2)\ P\{a \le X \le b\} = F(b) - F(a) \end{array}\right\}$$

Але в обох випадках необхідно обчислювати інтеграл чисельним методом

$$P\{a \le x \le b\} = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Уведемо нову перемінну t=(x-m)/σ. Звідси x=σt+m, dx=σdt. Знайдемо нові границі інтегрування. Якщо x=a, то t=(a–m)/σ; якщо x=b, то t=(b– m)/σ.

У такий спосіб маємо:

$$P\{a \le x \le b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{\frac{a-m}{\sigma}}^{\frac{b-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{a-m}{\sigma}}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{b-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{b-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{a-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

Користуючись функцією Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

Остаточно одержимо

$$P\{a \le X \le b\} = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

Приклад: X – нормально розподілена випадкова величина

m =2; σ = 2   Знайти P{0 (X (3}.

Рішення.

P{0 ≤ X ≤ 3} = Φ((3 – 2)/2) - Φ((0 – 2)/2) = Φ(0.5)- Φ(-1)=

= 0.1915 + 0.3413 = 0.5328

Лекція №6.

Основні задачі математичної статистики. Визначення законів розподілу випадкових величин на основі експериментальних даних.

Предмет і завдання математичної статистики.

Математичною статистикою називається наука, що займається методами обробки дослідних даних, отриманих у результаті спостережень над випадковими явищами. Будь-який такий результат можна подати як сукупність значень, отриманих у результаті *n* випробувань над якоюсь випадковою величиною або системою випадкових величин. Тому подальший матеріал викладається мовою випадкових величин.

Предмет математичної статистики складають методи реєстрації, опису й аналізу статистичних експериментальних даних, отриманих у результаті спостереження масових випадкових явищ.

До основних задач математичної статистики відносяться:

- Задача визначення закону розподілу випадкової величини по статистичним даним.

Теоретично при досить великому числі випробувань властиві досліджуваним випадковим величинам закономірності будуть здійснюватися як завгодно точно. На практиці ми завжди маємо справу з обмежаною кількістю експериментальних даних; у зв'язку з цим результати наших спостережень і їхньої обробки завжди містять більший або менший елемент випадковості. До методики обробки експериментальних даних варто висунути такі вимоги, щоб вона, по можливості, зберігала типові, характерні риси явища, що спостерігається, і відкидала все несуттєве, другорядне, зв'язане з недостатнім обсягом досвідченого матеріалу. У зв'язку з цим виникає задача згладжування або вирівнювання статистичних даних, подання їх у найбільш компактному виді за допомогою простих аналітичних залежностей.

- Задача перевірки правдоподібності гіпотез.

Ставиться вона так: у нашому розпорядженні є сукупність дослідних даних. Запитується, чи суперечать ці дані тій або іншій гіпотезі? Наприклад, гіпотезі про те, що випадкова величина X розподілена за законом із щільністю f(x). У результаті перевірки правдоподібності гіпотези може бути зроблений один з висновків: 1) відкинути гіпотезу, що суперечить дослідним даним; 2) не відкидати гіпотезу, вважати її прийнятною.

- Задача визначення невідомих параметрів розподілу.

Як на підставі статистичних даних оцінити, хоча б приблизно, що цікавлять нас характеристики, наприклад, математичне чекання, дисперсію і середньо квадратичне відхилення випадкової величини, над якою велися спостереження? З якою точністю, при даній кількості дослідів, будуть оцінюватися ці характеристики?

Проста й упорядкована статистична сукупність

Сукупність спостережених значень випадкової величини X являє собою первинний статистичний матеріал, що підлягає обробці. Така сукупність називається «простою статистичною сукупністю» або «простим статистичним рядом». Звичайно, проста статистична сукупність оформляється у виді таблиці, у першому стовпці якої записують номер випробування, а в другому – спостережене значення випадкової величини. Якщо значення випадкової величини розташувати у зростаючому порядку, то ми одержимо впорядковану статистичну сукупність

Статистична функція розподілу

Статистичною функцією розподілу випадкової величини X називається частота події $X<x$ у даному статистичному матеріалі

$$F^*(x)=P^*(X<x)$$

Для того щоб знайти значення статистичної функції розподілу при даному x, досить підрахувати число випробувань, у яких величина X прийняла значення, менше ніж x, і розділити на загальне число *n* зроблених випробувань.

Статистична функція розподілу будь-якої випадкової величини – переривaної або безперервної – являє собою переривану східчасту функцію, стрибки якої відповідають спостереженим значенням випадкової величини і по величині дорівнюють частотам цих значень. При збільшенні числа іспитів *n,* відповідно до теореми Бернуллі, при будь-якому x частота події $X<x$ наближається (сходиться по імовірності) до ймовірності цієї події. Отже при збільшенні *n* статистична функція розподілу $F^*(x)$ наближається (сходиться по ймовірності) до справжньої функції розподілу випадкової величини X.

Якщо X – безперервна випадкова величина, то при збільшенні числа спостережень *n* число стрибків функції $F^*(x)$ збільшується, самі стрибки зменшуються і графік функції $F^*(x)$ необмежено наближається до плавної кривої $F(x)$ – функції розподілу величини X.

Статистичний ряд

Розділимо весь діапазон спостережених значень X на інтервали або «розряди» і підрахуємо кількість значень m_i, що приходиться на кожний і-й розряд. Це число розділимо на загальне число спостережень n і знайдемо частоту, що відповідає даному розряду:

$$p_i^*=m_i/n$$

Сума частот усіх розрядів очевидно, повинна дорівнювати одиниці.

Побудуємо таблицю, в якій приведені розряди в порядку їхнього розташування уздовж осі абсцис і відповідні частоти. Ця таблиця називається статистичним рядом:

I_i	$x_1;x_2$	$x_2;x_3$	...	$x_i;x_{i+1}$	...	$x_k;x_{k+1}$
p_i^*	p_1^*	p_2^*		p_i^*		p_k^*

Тут I_i– позначення і-го розряду; $x_i;x_{i+1}$– його границі; p_i^*– відповідна частота; k– число розрядів.

Якщо значення випадкової величини знаходиться в точності на границі двох розрядів, то можна (чисто умовно) вважати дане значення приналежної рівною мірою до обох розрядів і додавати до чисел m_i того й іншого розряду по 0.5.

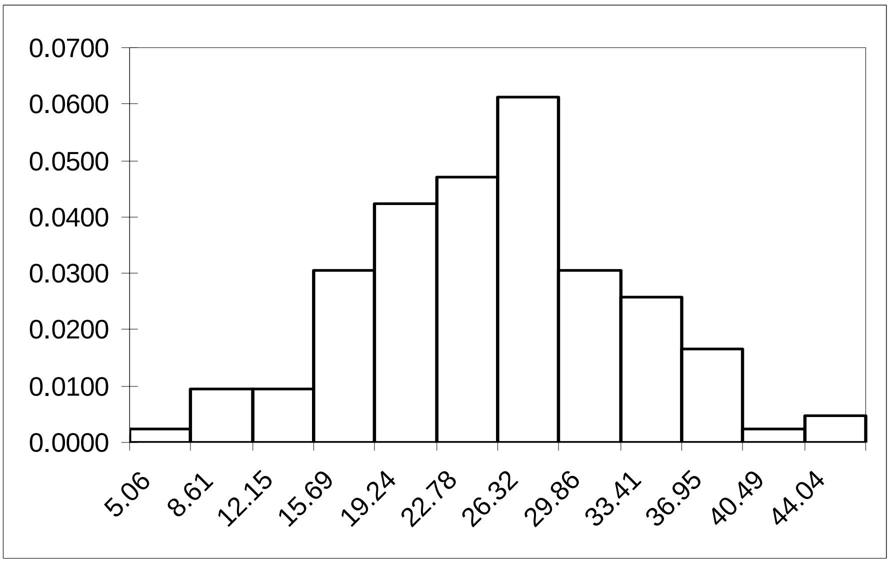
Число розрядів, на які слід групувати статистичний матеріал, не повинно бути занадто великим (тоді ряд розподілу стає невиразним, і частоти в ньому виявляють незакономірні коливання); з іншого боку, воно не повинно бути занадто малим (при малому числі розрядів властивості розподілу описуються статистичним рядом занадто грубо). Практика показує, що в більшості випадків раціонально вибирати число розрядів порядку 10 – 20. Довжини розрядів можуть бути як однаковими, так і різними. При виборі рівних інтервалів розбивки діапазону зміни випадкової величини оптимальна довжина інтервалу може бути визначена по оптимальній кількості інтервалів відповідно до таблиці:

n	100	200	400	600	800	1000	1500	2000
k	12	16	20	24	27	30	35	37

Гістограма

Статистичний ряд часто оформляється графічно у виді гистограммы. Гистограмма будується в такий спосіб. По осі абсцис відкладаються розряди, і на кожному з розрядів як на підставі будується прямокутник, площа якого дорівнює частоті даного розряду. Для побудови гистограммы потрібно частоту кожного розряду розділити на його довжину й отримане число взяти як висоту прямокутника. У випадку рівних по довжині розрядів висоти прямокутників пропорційні відповідним частотам. Зі способу побудови гистограммы випливає, що повна площа її дорівнює одиниці.

Очевидно, при збільшенні числа дослідів можна вибирати все більш і більш дрібні розряди; при цьому гістограма буде усе більш наближатися до деякої кривої, що обмежує площу, рівну одиниці. Неважко переконатися, що ця крива являє собою графік щільності розподілу величини X



Числові характеристики статистичного розподілу

Кожній числовій характеристиці випадкової величини X відповідає її статистична аналогія. Для математичного чекання випадкової величини аналогією є середнє арифметичне спостережених значень випадкової величини:

$$M^*[X] = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

де x_i– значення випадкової величини, спостережене в i-м досліді, n– число дослідів. Ця характеристика називається статистичним середнім випадкової величини.

Відповідно до закону великих чисел, при необмеженому збільшенні числа іспитів статистичне середнє наближається (сходиться по ймовірності) до математичного чекання. При досить великому n статистичне середнє може бути прийняте приблизно математичному чеканню. При обмеженому числі іспитів статистичне середнє є випадковою величиною, що, проте, зв'язана з математичним чеканням і може дати про нього відоме представлення.

Подібні статистичні аналогії існують для всіх числових характеристик. Будемо позначати ці статистичні аналогії тими ж буквами, що і відповідні числові характеристики, але постачати їх значком *.

Розглянемо, наприклад, дисперсію випадкової величини. Вона являє собою математичне чекання випадкової величини $\overset{\circ}{X}{}^2 = (X - m_x)^2$:

$$D[X] = M\left[\overset{\circ}{X}{}^2\right] = M\left[(X - m_x)^2\right]$$

Якщо в цьому виразі замінити математичне чекання його статистичною аналогією – середнім арифметичним, ми одержимо статистичну дисперсію випадкової величини X:

$$D^*[X] = \frac{\sum\left(x_i - m_x^*\right)^2}{n}$$

де $m_x^* = M^*[X]$– статистичне середнє.

Аналогічно визначаються статистичні початкові й центральні моменти будь-яких порядків:

$$\alpha_s^*[X] = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^s}{n}$$

$$\mu_s^*[X] = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_x^*\right)^s}{n}$$

Усі ці визначення повністю аналогічні визначенням числових характеристик випадкової величини. З тією різницею, що в них скрізь замість математичного чекання фігурує середнє арифметичне. При збільшенні числа спостережень, мабуть, усі статистичні характеристики будуть сходитися по ймовірності до відповідних математичних характеристик і при достатньому n можуть бути прийняті приблизно рівними їм.

Неважко довести, що для статистичних початкових і центральних моментів справедливі ті ж властивості, що були виведені для математичних моментів. Зокрема, статистичний перший центральний момент завжди дорівнює нулю:

$$\mu_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_x^*\right)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - m_x^* = m_x^* - m_x^* = 0$$

Співвідношення між центральними і початковими моментами також зберігаються:

$$\mu_2^* = D_x^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_x^*\right)^2}{n} = \frac{n\sum_{i=1} x_i^2}{n} - 2m_x^*\frac{n\sum_{i=1} x_i}{n} + \left(m_x^*\right)^2 = \alpha_2 - \left(m_x^*\right)^2$$

При дуже великій кількості випробувань обчислення характеристик за наведеними вище формулами стає надмірно громіздким, і можна застосувати наступний прийом: скористатися тими ж розрядами, на які був расподілен статистичний матеріал для побудови статистичного ряду або гистограмми, і вважати приблизно значення випадкової величини в кожному розряді постійним і рівним середньому значенню, що виступає в ролі «представника» розряду. Тоді статистичні числові характеристики будуть виражатися наближеними формулами

$$m_x^* = M^*[X] = \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i p_i^*$$

$$D_x^* = D^*[X] = \sum_{i=1}^{k}\left(\tilde{x}_i - m_x^*\right)^2 p_i^*$$

$$\alpha_s^*[X] = \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i^s p_i^*$$

$$\mu_s^*[X] = \sum_{i=1}^{k}\left(\tilde{x}_i - m_x^*\right)^2 p_i^*$$

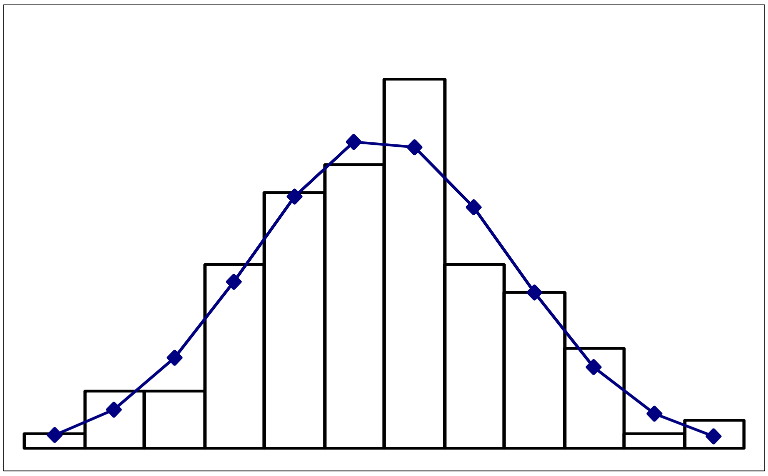
де $\tilde{x}_i$ – «представник» і-го розряду, p_i*– частота і-го розряду, k – число розрядів. Як видно, ці формули цілком аналогічні формулам, що визначають математичне чекання, дисперсію, початкові і центральні моменти дискретної випадкової величини X, з тією тільки різницею, що замість імовірностей у них використуються частоти, замість математичного чекання – статистичне середнє, замість числа можливих значень випадкової величини – число розрядів.

Лекція №7.
Вирівнювання статистичних рядів. Перевірка статистичних гіпотез

Вирівнювання статистичних рядів

Задача вирівнювання (згладжування) полягає в тому, щоб підібрати теоретичну плавну криву розподілу, яка виражає лише істотні риси статистичного матеріалу, але не випадковості, зв'язані з недостатнім обсягом експериментальних даних. Ця крива, з тієї або іншої точки зору, найкращим чином повинна описувати даний статистичний розподіл.

Задача про найкраще вирівнювання статистичних рядів, як і взагалі задача про найкраще аналітичне представлення емпіричних функцій, є задача значною мірою невизначена і рішення її залежить від того, що умовитися вважати «найкращим». При цьому питання про те, в якому саме класі функцій варто шукати найкраще наближення, вирішується вже не з математичних розумінь, а з міркувань, зв'язаних з фізикою розв'язуваної задачі, з урахуванням характеру отриманої емпіричної кривої і ступенем точності зроблених спостережень. Аналогічно, при вирішенні задачі вирівнювання статистичних рядів, принциповий вид теоретичної кривої вибирають заздалегідь із розумінь, пов'язаних із суттю задачі, а в деяких випадках просто із зовнішнім виглядом статистичного розподілу. Нехай для випадкової величини X ми побудували гістограму, що має вигляд, наведений на рисунку.



Природно припустити, що досліджувана випадкова величина X підкоряється нормальному закону:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Тоді задача вирівнювання переходить у задачу про раціональний вибір параметрів m і σ.

Будь-яка аналітична функція, за допомогою якої вирівнюється статистичний розподіл, повинна мати основні властивості щільності розподілу:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &\geq 0; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Припустимо, що, виходячи з тих або інших розумінь, нами обрана функція f(x), що задовольняє, наведеним вище умовам. За допомогою цієї функції ми хочемо вирівняти даний статистичний розподіл; у вираз функції f(x) входить кілька параметрів a, b, …; потрібно підібрати ці параметри так, щоб функція щонайкраще описувала даний статистичний матеріал. Один з методів, застосовуваних для вирішення цієї задачі, – це так званий метод моментів.

Відповідно до цього методу параметри a, b, … вибираються з таким розрахунком, щоб кілька найважливіших числових характеристик (моментів) теоретичного розподілу були рівні відповідним статистичним характеристикам. Наприклад, якщо теоретична крива f(x) залежить тільки від двох параметрів a і b, ці параметри вибираються так, щоб математичне чекання m_x і дисперсія D_x теоретичного розподілу збігалися з відповідними статистичними характеристиками m_x^* і D_x^* . Якщо крива f(x) залежить від трьох параметрів, можна підібрати їх так, щоб збіглися перші три моменти, і т.д.

При вирівнюванні статистичних рядів нераціонально користуватися моментами вище четвертого, тому що точність обчислення моментів різко падає зі збільшенням їхнього порядку.

Перевірка гіпотези про погодженість теоретичного і статистичного розподілу

Допустимо, що даний статистичний розподіл вирівняний за допомогою деякої теоретичної кривої. Як би добре ні була підібрана теоретична крива, між нею і теоретичним розподілом неминучі деякі розбіжності. Виникає питання: чи порозуміваються ці розбіжності тільки випадковими обставинами, зв'язаними з обмеженим числом спостережень, або вони є істотними і зв'язані з тим, що підібрана нами крива погано вирівнює даний статистичний розподіл. Для відповіді на таке питання служать так називані «критерії згоди».

Ідея застосування критеріїв згоди полягає в наступному. Нехай на підставі даного статистичного матеріалу необхідно перевірити гіпотезу H, що складається в тім, що випадкова величина X підкоряється деякому визначеному закону розподілу. Цей закон може бути заданий у тій або іншій формі: наприклад, у виді функції розподілу F(x) або у вигляді щільності розподілу f(x), або ж у виді сукупності ймовірностей p_i, де p_i– імовірність того, що величина X попадає в межі i-го розряду.

Для того щоб прийняти або спростувати гіпотезу H, розглянемо деяку величину U, що характеризує ступінь розбіжності теоретичного й статистичного розподілів. Величина може бути обрана різними способами; наприклад, у якості U можна взяти суму квадратів відхилень теоретичних ймовірностей p_i від відповідних частот p_i^* або суму тих же квадратів із деякими коефіцієнтами («вагами»), або ж максимальне відхилення статистичної функції розподілу $F^*(x)$ від теоретичної F(x) і т.д. Допустимо, що величина U обрана тим або іншим способом. Очевидно, це є деяка випадкова величина. Закон розподілу цієї випадкової величини залежить від закону розподілу випадкової величини X, над якою вироблялися іспити, і від числа іспитів n. Якщо гіпотеза H вірна, то закон розподілу величини U визначається законом розподілу величини X и числом n.

Допустимо, що цей закон розподілу нам відомий. У результаті даної серії іспитів виявлено, що обрана нами міра розбіжності U прийняла деяке значення u. Запитується, чи можна пояснити це випадковими причинами або ж ця розбіжність занадто велика і вказує на наявність істотної різниці між теоретичним і статистичним розподілами і, отже, на непридатність гіпотези H? Для відповіді на це питання припустимо, що гіпотеза H вірна, і обчислимо в цьому припущенні ймовірність того, що за рахунок випадкових причин, зв'язаних із недостатнім обсягом дослідницького матеріалу, міра розбіжності U виявиться не менше, ніж спостережене нами у випробуваннях значення u, тобто обчислимо імовірність події:

$$U \geq u.$$

Якщо ця ймовірність досить мала, то гіпотезу H слід відкинути як мало правдоподібну; якщо ж ця імовірність значна, варто визнати, що експериментальні дані не суперечать гіпотезі H.

Виникає питання про те, яким же способом слід вибирати міру розбіжності U? Виявляється, що при деяких способах її вибору закон розподілу величини U має досить прості властивості і при досить великому n практично не залежить від функції F(x). Саме такими заходами розбіжності і користуються в математичній статистиці в якості критеріїв згоди.

Одним з найбільш часто використовуваних критеріїв згоди є, так званий, «критерій χ^2» Пірсона.

Припустимо, що зроблено n незалежних випробувань, у кожному з яких випадкова величина X прийняла визначене значення. Результати іспитів зведені в k розрядів і оформлені у вигляді статистичного ряду:

I_i	$x_1; x_2$	$X_2; x_3$	…	$x_k; x_{k+1}$
p_i^*	p_1^*	p_2^*	…	p_k^*

Потрібно перевірити, чи погодяться експериментальні дані з гіпотезою про те, що випадкова величина X має даний закон розподілу (заданий функцією розподілу F(x) або щільністю f(x)). Назвемо цей закон розподілу «теоретичним».

Знаючи теоретичний закон розподілу, можна знайти теоретичні ймовірності влучення випадкової величини в кожний з розрядів:

$$p_1, p_2, \ldots, p_k.$$

Перевіряючи погодженість теоретичного й статистичного розподілів, будемо виходити з розбіжності між теоретичними ймовірностями p_i і спостереженими частотами p_i^*. Природно вибрати як міру розбіжності між теоретичним і статистичним розподілами суму квадратів відхилень (p_i^*-p_i), взятих з деякими «вагами» c_i:

$$U = \sum_{i=1}^{k} c_i \left(p_i^* - p_i\right)^2$$

Коефіцієнти c_i («ваги» розрядів) вводять тому, що в загальному випадку відхилення, що відносяться до різних розрядів, не можна вважати рівноправними за значущості. Те саме за абсолютною величиною відхилення (p_i^*-p_i) може бути мало значним, якщо сама ймовірність p_i велика, і дуже помітним, якщо вона мала. Тому природно «ваги» c_i взяти назад пропорційними ймовірностям розрядів p_i.

К. Пірсон показав, що коли покласти

$$c_i = \frac{n}{p_i},$$

то при великих n закон розподілу величини U має досить прості властивості: він практично не залежить від функції розподілу F(x) і від числа іспитів n , а залежить тільки від числа розрядів k, а саме, цей закон при збільшенні n наближається до так званого «розподілу χ^2». При такому виборі коефіцієнтів c_i міра розбіжності, звичайно, позначається χ^2:

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(p_i^* - p_i\right)^2}{p_i}$$

Розподіл χ^2 залежить від параметра r, називаного числом «ступенів волі» розподілу. Число «ступенів волі» r дорівнює числу розрядів k мінус число незалежних умов («зв'язків»), накладених на частоти p_i*. Прикладами таких умов можуть бути

$$\sum_{i=1}^{k} p_i^* = 1,$$

якщо ми вимагаємо тільки того, щоб сума частот дорівнювала одиниці (ця вимога накладається у всіх випадках);

$$\sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i p_i = m_x,$$

якщо ми підбираємо теоретичний розподіл з тією умовою, щоб збігалися теоретичне й статистичне середні значення;

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\tilde{x}_i - m_x^*\right)^2 p_i^* = D_x,$$

якщо ми вимагаємо, крім того, збігу теоретичної й статистичної дисперсій і т.д. Для розподілу χ^2 складені спеціальні таблиці. Фрагмент такої таблиці наведений нижче:

r	p		
	0,10	0,05	0,02
8	13,36	15,51	18,17
9	14,68	16,92	19,68
10	15,99	18,31	21,20

У цій таблиці входами є: значення імовірності p і число ступенів свободи r. Числа що записані в таблиці, являють собою значення χ_z^2, для яких виконується умова

$$P\left\{\chi^2 \geq \chi_z^2\right\} = p_z,$$

де p_z– задане значення p.

Схема застосування критерію до оцінки погодженості теоретичного й статистичного розподілів зводиться до наступного:

1) визначається міра розбіжності $\chi^2_{набл}$ по формулі

$$\chi^2_{набл} = n\sum_{i=1}^{k} \frac{\left(p_i^* - p_i\right)^2}{p_i}$$

2) визначається число ступенів волі r як число розрядів k мінус число накладених зв'язків s:

$$r=k-s$$

3) по r і заданому малому значенню p по таблиці визначається значення $\chi^2_{\text{крит}}$ для якого справедливо

$$P\{\chi^2 \geq \chi^2_{крит}\} = p$$

4) якщо, $\chi^2_{набл} < \chi^2_{крит}$ то гіпотезу можна визнати як не суперечну дослідним даним, у противному випадку гіпотеза відкидається як неправдоподібна.

Наскільки мала повинна бути ймовірність p для того, щоб відкинути або переглянути гіпотезу, – питання невизначене; воно не може бути вирішеним з математичних розумінь, так само як і питання про те, наскільки мала повинна бути ймовірність події для того, щоб вважати його практично неможливим. На практиці, рекомендується вибирати $p \leq 0{,}1$.

Лекція №8.

Оцінка параметрів випадкових величин

Оцінка як функція випадкових величин – результатів спостережень

Розглянемо питання про визначення числових характеристик випадкової величини X в разі n незалежних випробувань. Позначимо спостережені значення випадкової величини

$$X_1, X_2, \ldots, X_n.$$

Їх можна розглядати як n «екземплярів» випадкових величин X, тобто n незалежних випадкових величин, кожна з яких розподілена за тим же законом, що і випадкова величина X.

Позначимо ã оцінку параметра a. Будь-яка оцінка, обчислена на основі матеріалу $X_1, X_2, \ldots, X_n$ повинна являти собою функцію цих величин:

$$\tilde{a}=\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

і, отже, сама є величиною випадковою. Така оцінка називається «крапковою». Закон розподілу ã залежить, по-перше, від закону розподілу величини X (і, зокрема, від самого невідомого параметра a): по-друге, від числа дослідів n. У принципі цей закон розподілу може бути знайдений відомими методами теорії ймовірностей.

Критерії оцінок

- Спроможність.

Якщо при збільшенні числа випробувань n оцінка ã сходиться за імовірністю до параметра a, то така оцінка називається спроможною:

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\tilde{a} - a| < \varepsilon\} = 1$$

- Незміщенність

Якщо математичне чекання оцінки ã дорівнює оцінюваному параметру a, тобто виконується

$$M[\tilde{a}]=a,$$

то така оцінка називається незміщеною.

- Ефективність.

Якщо оцінка a володіє в порівнянні з іншими оцінками найменшою дисперсією, тобто

$$D[\tilde{a}]=\min,$$

те вона буде названа ефективною.

На практиці не завжди вдається задовольняти всім цим вимогам. Наприклад, може виявитися, що навіть якщо ефективна оцінка існує, формули для її обчислення виявляються занадто складними, і доводиться задовольнятися іншою оцінкою, дисперсія якої трохи більше. Іноді застосовують незначно зміщені оцінки. Однак вибору оцінки завжди повинен передувати її критичний розгляд з усіх перерахованих вище критеріїв.

Оцінки для математичного чекання й дисперсії

Нехай мається випадкова величина X з математичним чеканням m і дисперсією D; обоє параметра невідомі. Над величиною X зроблено n незалежних іспитів, що дали результати $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Як оцінку для математичного чекання природно взяти статистичне середнє m*:

$$\tilde{m} = m^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

Можна довести, що ця оцінка є спроможною і незміщеною. Якщо величина X розподілена по нормальному закону, дисперсія буде мінімально можливою, тобто оцінка є ефективною. Для інших законів розподілу це може бути і не так. Якщо як оцінку дисперсії взяти статистичну дисперсію D*

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \tilde{m}\right)^2}{n},$$

то при перевірки виявиться, що ця оцінка спроможна, але не є незміщеною. Її математичне чекання:

$$M\left[D^*\right] = \frac{n-1}{n} D$$

Користуючись оцінкою D* замість дисперсії D, ми будемо робити деяку систематичну помилку в меншу сторону. Щоб ліквідувати цей зсув, досить ввести виправлення, помноживши величину D* на n/(n-1).

Оцінка

$$\tilde{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \tilde{m}\right)^2}{n-1}$$

називається «виправленою» статистичною дисперсією. Ця оцінка спроможна і незміщена, але ефективною вона не є. Однак у випадку нормального розподілу вона є «асимптотично ефективною», тобто при збільшенні n відношення її дисперсії до мінімально можливого необмежено наближається до одиниці.

Метод моментів для крапкової оцінки параметрів розподілу

Цей метод заснований на тому, що початкові й центральні статистичні моменти є спроможними оцінками відповідно початкових і центральних теоретичних моментів того ж порядку. Метод запропонований К. Пірсоном і складається в прирівнюванні теоретичних моментів розглянутого розподілу відповідним статистичним моментам того ж порядку.

Нехай заданий вид щільності розподілу f(x,θ), обумовлений одним невідомим параметром θ. Потрібно знайти крапкову оцінку параметра θ.

Випливаючи методу моментів, дорівняємо початковий теоретичний момент першого порядку початковому статистичному моменту першого порядку:

$$m=m^*$$

Математичне чекання, як видно зі співвідношення

$$m=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x;\theta)dx=\varphi(\theta)$$

є функція від θ, тому вираження

$$\varphi(\theta)=m^*$$

можна розглядати як рівняння з одним невідомим θ. Вирішивши це рівняння щодо параметра θ, тим самим знайдемо його крапкову оцінку.

Нехай заданий вид щільності розподілу $f(x,\theta_1,\theta_2)$, обумовлений невідомими параметрами θ_1 і θ_2. Для відшукання двох параметрів необхідні два рівняння щодо цих параметрів. Випливаючи методу моментів дорівняємо початковий теоретичний момент першого порядку початковому статистичному моменту першого порядку і центральний теоретичний момент другого порядку центральному статистичному моменту другого порядку:

$$m=m^* \qquad D=D^*$$

З огляду на те, що

$$m=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x;\theta_1,\theta_2)dx=\varphi_1(\theta_1,\theta_2)$$

і

$$D=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\varphi_1(\theta_1,\theta_2)\right)^2 f(x;\theta_1,\theta_2)dx=\varphi_2(\theta_1,\theta_2),$$

можемо скласти систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases}\varphi_1(\theta_1,\theta_2)=m^*\\ \varphi_2(\theta_1,\theta_2)=D^*\end{cases}$$

Вирішивши цю систему щодо невідомих параметрів θ_1 і θ_2, тим самим одержимо їхні крапкові оцінки.

Метод найбільшої правдоподібності. (Запропонований Р. Фишером.)

Дискретні випадкові величини. Нехай X – дискретна випадкова величина, що у результаті n випробувань прийняла значення x_1, x_2, . . . , x_n. Допустимо, що вид закону розподілу величини X заданий, але невідомий параметр θ, яким визначається цей закон. Потрібно знайти його точкову оцінку.

Позначимо імовірність того, що в результаті випробування величина X прийме значення x_i (i=1, 2, . . ., n), через $p(x_i; \theta)$.

Функцією правдоподібності дискретної випадкової величини X називають функцію аргументу θ:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = p(x_1; \theta)p(x_2; \theta)\ldots p(x_n; \theta),$$

де x_1, x_2, . . . , x_n – фіксовані числа.

Як точкову оцінку параметра θ приймають таке його значення θ*, при якому функція правдоподібності досягає максимуму. Оцінку θ* називають оцінкою найбільшої правдоподібності.

Функції L і ln(L) досягають максимуму при тому самому значенні, тому замість відшукання максимуму функції L шукають (що зручніше) максимум функції ln(L). Функцію ln(L) називають логарифмічною функцією правдоподібності.

Безперервні випадкові величини. Нехай X – безперервна випадкова величина, що в результаті n випробувань прийняла значення x_1, x_2. . . , x_n . Допустимо, що вид щільності розподілу f(x; θ) заданий, але не відомий параметр θ, яким визначається ця функція.

Функцією правдоподібності безперервної випадкової величини X називють функцію аргументу θ

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta)f(x_2; \theta)\ldots f(x_n; \theta),$$

де x_1, x_2, . . . , x_n – фіксовані числа.

Оцінку найбільшої правдоподібності невідомого параметра розподілу безперервної випадкової величини шукають так само, як у випадку дискретної величини.

Довірчий інтервал. Довірча імовірність

Щоб дати уявлення про точність і надійність оцінки ã, у математичній статистиці користуються так званими довірчими інтервалами і довірчими ймовірностями. Ці поняття особливо актуальні при малому числі спостережень, коли крапкова оцінка ã значною мірою випадкова і наближена заміна а на ã може привести до серйозних помилок.

Нехай для параметра а отримана незміщена оцінка ã. Ми хочемо оцінити можливу при цьому помилку. Призначимо деяку досить велику ймовірність (наприклад, β=0,9, 0,95 або 0,99) таку, що подію з імовірністю β можна вважати практично достовірною, і знайдемо таке значення ε, для якого

$$P\left(\left|\tilde{a}-a\right|<\varepsilon\right)=\beta$$

Тоді діапазон практично можливих значень помилки, що виникає при заміні а на ã, буде $\pm\varepsilon$; великі за абсолютною величиною помилки будуть з'являтися тільки з малою імовірністю.

Перепишемо приведене вище рівняння у вигляді:

$$P\left(\tilde{a}-\varepsilon<a<\tilde{a}+\varepsilon\right)=\beta,$$

Це означає , що з імовірністю β невідоме значення параметра а попадає в інтервал

$$I_{\beta}=(\tilde{a}-\varepsilon;\ \tilde{a}+\varepsilon).$$

Довірчим називають інтервал, що покриває невідомий параметр із заданою імовірністю (надійністю).

Довірчою імовірністю (надійністю) називається імовірність, з якої здійснюється нерівність $\left|\tilde{a}-a\right|<\varepsilon$.

Величина а не випадкова, зате випадковий інтервал. Випадково його положення на осі абсцис, обумовлене його центром ã; випадкова узагалі довжина інтервалу 2ε, тому що величина ε обчислюється, як правило, по експериментальним даним. Тому краще тлумачити величину β не як імовірність «улучення» значення а в інтервал I_{β}, а як імовірність того, що випадковий інтервал I_{β} накриє значення а.

Ми розглядали довірчий інтервал симетричний відносно а, узагалі говорячи це не обов'язково.

Щоб оцінити точність і надійність оцінки, потрібно знати її закон розподілу. Якби нам був відомий закон розподілу величини ã, задача побудування довірчого інтервалу була б досить проста: досить було б знайти таке значення ε, для якого

$$P\left(\left|\tilde{a}-a\right|<\varepsilon\right)=\beta .$$

Утруднення полягає в тому, що закон розподілу оцінки ã залежить від закону розподілу величини X и, отже, від його його невідомих параметрів (зокрема, і від самого параметра a).

Довірчий інтервал для математичного чекання нормально розподіленої випадкової величини з відомою дисперсією

Приймемо без доказу, що якщо випадкова величина X розподілена нормально, те узяте як оцінку її математичного чекання $\tilde{m}$ статистичне середнє:

$$\tilde{m}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n},$$

є випадкова величина розподілена нормально, параметри цього закону наступні:

$$M[\tilde{m}]=m \qquad D[\tilde{m}]=\frac{D}{n} \qquad \sigma_{\tilde{m}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

де m, D і σ відповідні параметри закону розподілу випадкової величини X.

Розглянемо випадкову величину $\Delta=\tilde{m}-m$. Закон розподілу Δ також буде нормальним, а його параметри

$$M[\Delta]=0, \qquad D[\Delta]=0, \qquad \sigma_{\Delta}=\sigma/\sqrt{n}$$

Визначимо імовірність улучення випадкової величини Δ на відрізок [-α, α]:

$$P\{-\alpha<\Delta<\alpha\}=\Phi\left(\frac{\alpha-M[\Delta]}{\sigma_\Delta}\right)-\Phi\left(\frac{-\alpha-M[\Delta]}{\sigma_\Delta}\right)=\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma/\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(-\frac{\alpha}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$P\{-\alpha<\Delta<\alpha\}=2\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

Позначимо

$$u=\frac{\alpha}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad\qquad 2\Phi(u)=\beta$$

Задавши довірчу імовірність β, по таблиці значень інтегральної функції Лапласа легко визначити значення u, з огляду на що $\Phi(u) = \beta / 2$. Потім визначаємо α

$$\alpha = u \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Тепер можемо записати

$$P\left\{-u \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \tilde{m} - m < u \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = \beta,$$

або

$$P\left\{\tilde{m} - u \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \tilde{m} + u \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = \beta.$$

У такий спосіб $I_\beta = \left(\tilde{m} - u \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \tilde{m} + u \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ – це довірчий інтервал для математичного чекання випадкової величини X, із нормальним законом розподілу, при заданій довірчій імовірності β.

Список джерел

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.– 480 с.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. – М.: Радио и связь, 1983. – 416 с., ил.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебн. пособие для втузов. М.: Высш. школа, 1977.– 479 с., ил.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Учебн. пособие для втузов. - М.: Высш. школа, 1979. - 400 с.
5. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М., Наука, 1969. -575 с.
6. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. Задачи и упражнения. -М., Наука, 1973 - 365 с.
7. Гнеденко В.В., Хинчин А.Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. -М., Наука, 1988. - 160 с.
8. Филлер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Пер. с англ. -М., Мир, 1984.
9. Жалдак М.И., Квитко А.Н. Теория вероятностей с элементами информатики. Практикум. Учебн. пособие. Под общ. ред. Ядренко М.И. -К., Вища шк., 1989. -263 с.
10. Коваленкко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебн. пособие для втузов. - М., Высшая шк, 1973.-368с.
11. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Сборник задач по теории вероятностей. Учебн. пособие для втузов. - М., Наука, 1989. – 320с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

,

Теорія ймовірностей і математична статистика: Конспект лекцій (для студентів 2 курсу денної форми навчання за напрямом підготовки 6.060101 ”Будівництво”, спеціальностей “Промислове та цивільне будівництво”, “Міське будівництво та господарство”).

Автори **ФЕДОРОВ** Микола Вікторович,
ХРЕНОВ Олександр Михайлович

Редактор *М. З. Аляб'єв*

Комп’ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2010, поз. 151Л

Підп. до друку 29.03.2010 Формат 60х84 1/16
Друк. на ризографі Ум. друк. арк. 2,8
Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса:rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб´єкта видавничої справи:
ДК №731 від 19.12.2001